فصل

۲۷

نوسان‌های الکترومغناطیسی و جریان متناوب الکتریکی

بخش ۲۷-۲ نوسان‌های LC ، بررسی کیفی

۱۰- یک مدار LC نوسانی شامل یک القاگر ۷۵/۰mH و یک خازن ۳/۶۰μF است. اگر بار بیشینه روی خازن ۲/۹۰ μC باشد (الف) انرژی کل در مدار چقدر است؟ (ب) جریان بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) وقتی که خازن دارای بار بیشینه است تمام انرژی مدار در خازن ذخیره می‌شود.

$$U=\frac{q^{۲}}{۲c}=\frac{(۲/۹\times۱۰^{-۶})^{۲}}{۲(۳/۶\times۱۰^{-۶})}=۱/۱۷\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{J}$$

(ب) وقتی خازن به طور کامل تخلیه شده باشد جریان بیشینه است و تمام انرژی در القاگر ذخیره می‌شود.

$$U=\frac{۱}{۲}LI^{۲}\Rightarrow ۱/۱۷\times۱۰^{-۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)\left[۷۵\times۱۰^{-۳}\right)I^{۲}$$

$$\Rightarrow I=۵/۵۸\times۱۰^{-۳}\mathrm{A}$$

۲۰- بسامد نوسان یک مدار LC معین ۲۰۰kHz است. در زمان $t=۰$ ، صفحهٔ A خازن بیشترین بار مثبت را دارد. در چه کوچکترین زمان $t>۰$ ، (الف) صفحهٔ A مجدداً بیشترین بار مثبت را خواهد داشت؛ (ب) صفحهٔ دیگر خازن بیشترین بار مثبت را خواهد داشت و (پ) القاگر بیشترین میدان مغناطیسی را خواهد داشت؟

حل: (الف) در مضرب‌هایی از دورهٔ تناوب دارای بار مثبت بیشینه هستیم لذا

$$t_A=nT=\frac{n}{f}=\frac{n}{۲\times۱۰^{۳}}=n(۵\mu\mathrm{s})$$

که در آن نزدیکترین زمان به ازای $n=۱$ به دست می‌آید و لذا $t_A=۵\mu s$:

(ب) $t=\frac{T}{۲}=۲/۵\mu\mathrm{s}$

(پ) $t=\frac{T}{۴}=۱/۲۵\mu\mathrm{s}$

•۳- در یک مدار LC نوسانی معین، انرژی کل در $1.50\,\mu s$ از انرژی الکتریکی در خازن به انرژی مغناطیسی در القاگر تبدیل می‌شود. (الف) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (ب) بسامد نوسان چقدر است؟ (پ) وقتی انرژی مغناطیسی بیشینه است، پس از چه مدت مجدداً بیشینه خواهد بود؟

حل: (الف) $T = 4(1.5\times10^{-6}) = 6\times10^{-6}\ \text{s} = 6\,\mu s$

(ب) $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{6\times10^{-6}} = 1.67\times10^{5}\ \text{Hz}$

(پ) چون $U_B \propto I^2$ است، انرژی مغناطیسی به جهت جریان بستگی ندارد و همان‌طور که از شکل ۲۷-۱ کتاب در می‌یابیم، پس از نیم دوره یعنی $T = 3\,\mu s$ ، انرژی مغناطیسی بیشینه می‌شود.

•۴- ظرفیت یک مدار LC نوسانی در صورتی که بار بیشینهٔ روی خازن $1.6\,\mu C$ و انرژی کل $140\,\mu J$ باشد، چقدر است؟

حل:

$$C = \frac{q^2}{2U} = \frac{(1.6\times10^{-6})^2}{2(1.4\times10^{-6})} = 9.14\times10^{-9}\ \text{F}$$

•۵- در یک مدار LC نوسانی، $L=1.10\,\text{mH}$ و $C=4.00\,\mu\text{F}$ است. بار بیشینهٔ روی خازن $3.00\,\mu C$ است. جریان بیشینه را به دست آورید.

حل:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow I = \frac{q}{\sqrt{LC}}$$

$$I = \frac{3\times10^{-6}}{\sqrt{(1.1\times10^{-3})(4\times10^{-6})}} = 4.52\times10^{-2}\ \text{A}$$

بخش ۲۷-۳ قیاس الکتریکی- مکانیکی

•۶- وقتی یک جسم $0.5\,\text{kg}$ متصل به فنر $2.0\,\text{mm}$ از وضعیت تعادل کشیده و رها شود؛ با نیروی بازگرداندهٔ $8.0\,\text{N}$ حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. (الف) بسامد زاویه‌ای نوسان چقدراست؟ (ب) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (پ) ظرفیت یک مدار LC با همان دورهٔ تناوب اگر L برابر $5.0\,\text{H}$ باشد چقدر است؟

حل: (الف) $F = kx \Rightarrow 8 = k(2\times10^{-3}) \Rightarrow k = 4000\ \text{N/m}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{0.5}}\ 89.44\ \text{rad/s}$$

(ب) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{89.44} = 7.02\times10^{-2}\ \text{s}$

(پ) $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \dfrac{1}{L\omega^2} = \dfrac{1}{(5)(89.44)^2}$

$= 2.5\times10^{-5}\ \text{F}$

••۷- انرژی در یک مدار LC نوسانی شامل القاگر $1.25\,\text{H}$ برابر $5.70\,\mu J$ است. بیشترین بار روی خازن $175\,\mu C$ است. مطلوب است (الف) جرم، (ب) ثابت فنر، (پ) بیشترین جابه‌جایی و (ت) بیشترین تندی برای یک دستگاه مکانیکی با همان دورهٔ تناوب.

حل: (الف) معادلهٔ دیفرانسیلی مدار LC عبارت است از و معادله متناظر آن برای فنر آرمانی عبارت است از:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

مشاهده می‌کنیم که القاییدگی L متناظر جرم است لذا:

$$m = 1.25\ \text{kg}$$

(ب) می‌بینیم که واورن ظرفیت C متناظر k است لذا ابتدا C را محاسبه می‌کنیم.

$$C = \frac{q^2}{2U} = \frac{(175\times10^{-6})^2}{2(5.7\times10^{-6})} = 2.69\times10^{-3}\ \text{F}$$

و از آنجا داریم:

$$k = \frac{1}{C} = \frac{1}{2.69\times10^{-3}} = 372\ \text{N/m}$$

(پ) $U_{max} = \dfrac{1}{2}k\,x_{max}$

$$5.7\times10^{-6} = \frac{1}{2}(372)x_{max}^2 \Rightarrow x_{max} = 1.75\times10^{-4}\ \text{m}$$

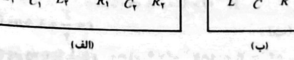
(ت) انرژی کل یک نوسانگر متناظر با بیشینهٔ انرژی پتانسیل و یا بیشینه انرژی جنبشی دستگاه قطعه- فلز است.

$$U_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow 5.7\times10^{-6} = \frac{1}{2}(1.25)v_{max}^2$$

$$\Rightarrow v_{max} = 3.02\times10^{-3}\ \text{m/s}$$

بخش ۲۷-۴ نوسان‌های LC ، بررسی کمی

•۸- یک تک حلقه شامل چندین القاگر $(L_1, L_2, \ldots)$ ، چندین خازن $(C_1, C_2, \ldots)$ و چندین مقاومت $(R_1, R_2, \ldots)$ است که به ترتیب نشان داده شده در شکل ۲۷-۲۶ الف به طور متوالی به هم متصل‌اند. نشان دهید که بدون توجه به ترتیب این عنصرهای مدار در حلقه، رفتار این مدار با رفتار مدار LC ساده نشان داده شده در شکل ۲۷-۲۶ ب یکسان است. (*راهنمایی:* قاعدهٔ حلقه را بررسی و به مسئلهٔ ۴۷ در فصل ۲۶ نگاه کنید.)



(الف) (ب)

شکل ۲۷-۲۶ مسئلهٔ ۸

حل: قاعده حلقه برای کل مدار را در نظر می‌گیریم

$$\varepsilon = \sum_j(\varepsilon_{L_j} + \varepsilon_{C_j} + \varepsilon_{R_j}) = \sum_j\left(L_j\frac{di}{dt} + \frac{q}{C_j} + iR_j\right) = 0$$

با در نظر گرفتن روابط زیر:

$$L = \sum_j L_j\ ,\ \frac{1}{C} = \sum_j C_j\ ,\ R = \sum_j R_j$$

داریم: $\varepsilon = L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{c} + iR = L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{c} + R\dfrac{dq}{dt} = 0$

که همان معادل یک مدار ساده RLC نشان داده در شکل (ب) است.

•۹- ILW در یک مدار LC با $L=50\,\text{mH}$ و $C=4.0\,\mu\text{F}$ جریان در ابتدا بیشینه است. چه مدت طول می‌کشد؛ تا خازن برای اولین بار به طور کامل پر شود؟

حل: در مدار LC فاصلهٔ زمانی بین پر شدن کامل $t = T/4$ است که در آن T دورهٔ تناوب $T = 2\pi/w = 2\pi\sqrt{LC}$ است و در نتیجه داریم:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(0.05)(4\times10^{-6})}}{2} = 7\times10^{-4}\ \text{s}$$

•۱۰- نوسانگرهای LC در مدارهای متصل به بلندگوها به کار برده می‌شوند تا برخی از صداهای موسیقی الکترونیکی را ایجاد کنند. با یک خازن $6.7\,\mu\text{F}$ ، چه القاگری باید به کار برده شود تا بسامد $10\,\text{kHz}$ را که وسط محدودهٔ بسامدهای صوتی است ایجاد کند؟

حل: $\omega = 2\pi f = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \dfrac{1}{4\pi^2 f^2 C}$

$$L = \frac{1}{4\pi^2(10\times10^3)(6.7\times10^{-6})} = 3.8\times10^{-5}\ \text{H}$$

••۱۱- SSM WWW خازن متغیری با گسترهٔ از ۱۰ تا $365\,\text{pF}$ با یک پیچه برای تشکیل یک مدار نوسانگر LC با بسامد متغیر به کار می‌رود تا با آن بتوان ورودی یک رادیو را تنظیم کرد. (الف) با چنین خازنی چه نسبتی از بسامد بیشینه به کمینه را می‌توان به دست آورد؟ اگر این مدار برای به دست آوردن بسامدهایی از $0.54\,\text{MHz}$ تا $1.60\,\text{MHz}$ به کار رود، نسبت محاسبه شده در (الف) خیلی بزرگ می‌شود. با افزودن خازنی به طور موازی با خازن متغیر، این گستره را می‌توان تنظیم کرد. برای به دست آوردن گسترهٔ بسامد دلخواه، (ب) چه خازنی باید افزود و (پ) و القاییدگی پیچه باید چقدر باشد؟

حل: (الف)

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{min}}}\ ,\ f_{min} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{max}}}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{\sqrt{C_{max}}}{\sqrt{C_{min}}} = \frac{\sqrt{365}}{\sqrt{10}} = 6.04$$

(ب) خازن اضافی C به گونه‌ای است انتخاب شده که نسبت بسامدها چنین باشد

$$\text{نسبت} = \frac{1.6}{0.54} = 2.96$$

چون خازن اضافی موازی بسته شده در نتیجه می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{C+365}}{\sqrt{C+10}} = 2.96 \Rightarrow C = 35.63\ \text{pF}$$

(پ)

$$f_{min}^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC'^2} \Rightarrow$$

$$(0.54\times10^6)^2 = \frac{1}{4\pi^2 L(365+35.63)} \Rightarrow L = 2.17\times10^{-4}\ \text{H}$$

••۱۲- در یک مدار نوسانگر LC وقتی ۷۵٪ انرژی کل در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره شده است، (الف) چه مضربی از بار بیشینه روی خازن است و (ب) چه مضربی از جریان بیشینه در القاگر برقرار است؟

حل: (الف) چون ۷۵٪ انرژی در میدان مغناطیسی ذخیره شده لذا در می‌یابیم که ۲۵٪بقیه در میدان الکتریکی ذخیره شده است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{U_E}{U_{E,max}} = \frac{q^2/2C}{q^2_{m,max}/2C} = 0.25$$

در نتیجه $q = 0.5q_{max}$.

(ب)

$$\frac{U_B}{U_{B,max}} = \frac{Li^2/2}{Li^2_{max}/2} = 0.75$$

در نتیجه $i = 0.866i_{max}$.

••۱۳- در یک مدار نوسانگر LC ، $L=3.00\,\text{mH}$ و $C=2.70\,\mu\text{F}$ است. در $t=0$ بار روی خازن صفر و جریان $2.00\,\text{A}$ است. (الف) بیشترین باری که روی خازن ظاهر می‌شود چقدر است؟ (ب) کمترین زمان $t>0$ که در طی آن آهنگ ذخیره انرژی در خازن بیشترین مقدار را دارد چقدر است و (پ) این آهنگ بیشترین چقدر است؟

حل: (الف)

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2_{max} = \frac{1}{2}(3\times10^{-3})(2)^2 = 6\times10^{-3}\ \text{J}$$

و از پایستگی داریم:

$$U_E = \frac{q^2_{max}}{2C} = U_B \Rightarrow q_{max} = \sqrt{2CU_B}$$

$$q_{max} = \sqrt{2(2.7\times10^{-6})(6\times10^{-3})} = 1.8\times10^{-4}\ \text{C}$$

(ب)

$$q = q_{max}\sin(\omega t)$$

$$U_E\frac{q^2}{2C} = \frac{q_{max}^2 w\sin^2(\omega t)}{2C}$$

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{q_{max}^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{C} = \frac{q_{max}^2\omega}{2C}\sin(2\omega t)$$

بیشترین آهنگ تغییر ذخیرهٔ انرژی در خازن وقتی رخ می‌دهد که $\sin(2\omega t) = 1$ باشد یعنی $2\omega t = \pi/2$ ، لذا خواهیم داشت:

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4}\sqrt{LC} = \frac{\pi}{4}\sqrt{(3\times10^{-3})(2/7\times10^{-6})} = 7/07\times10^{-5}\ \text{s}$$

(پ) با قرار دادن $\omega = 2\pi/T$ و $\sin(2\omega t) = 1$ در رابطه du_E/dt خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dU_E}{dt}\right) = \frac{2\pi q_{max}^2}{2TC} = \frac{\pi q_{max}^2}{TC}$$

از طرفی داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{(3\times10^{-3})(2/7\times10^{-6})} = 5/65\times10^{-4}\ \text{s}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dU_E}{dt}\right)_{max} = \frac{\pi(1/8\times10^{-4})^2}{(5/65\times10^{-4})(2/7\times10^{-6})} = 66/7\ \text{W}$$

●●۱۴- برای ساخت یک دستگاه LC نوسانی، می‌توانید یک القاگر ۱۰mH ، یک خازن ۵/۰μF و یک خازن ۲/۰μF را انتخاب کنید. (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، (پ) دومین بزرگترین و (ت) بزرگترین بسامد نوسانی که می‌توان با این عنصرها در ترکیب‌های مختلف برقرار کرد، چقدر است؟

حل: (الف) کمترین بسامد مربوط به ظرفیت بزرگتر است، و در اینجا بیشترین ظرفیت موقعی است که دو خازن موازی باشند که کمترین بسامد توسان به دست می‌آید.

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(10\times10^{-3})(5+2)\times10^{-6}}} = 601/8\ \text{Hz}$$

(ب) دومین کمترین بسامد نوسان از اتصال فقط خازن C_1 به دست می‌آید.

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(10\times10^{-3})(5\times10^{-6})}} = 711\ \text{Hz}$$

(پ) دومین بیشترین بسامد نوسان از اتصال فقط C_2 به دست می‌آید.

$$f_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1\times10^{-2})(2\times10^{-6})}} = 1/12\times10^{3}\ \text{Hz}$$

(ت) بیشترین بسامد نوسان از اتصال متوالی خازن‌ها به دست می‌آید.

$$f_4 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L[C_1C_2/(C_1+C_2)]}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5\times10^{-6} + 2\times10^{-6}}{(1\times10^{-2})(5\times10^{-6})(2\times10^{-6})}}$$

$$= 1/33\times10^{3}\ \text{Hz}$$

●●۱۵- ILW یک مدار LC نوسانی شامل یک خازن ۱/۰nF و یک پیچهٔ ۳/۰mH دارای بیشترین ولتاژ ۳/۰V است. مطلوب است تعیین (الف) بیشترین بار روی خازن، (ب) بیشترین جریانی که از مدار می‌گذرد و (پ) بیشترین انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی پیچه.

حل: (الف) برای بار بیشینه داریم:

$$q_{max} = CV_{max} = (1\times10^{-9})(3) = 3\times10^{-9}\ \text{C}$$

(ب) از رابطه انرژی ذخیره شده چنین داریم:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow I = \frac{q}{\sqrt{LC}}$$

$$I_{max} = \frac{3\times10^{-9}}{\sqrt{(3\times10^{-3})(1\times10^{-9})}} = 1/73\times10^{-3}\ \text{A}$$

(پ)

$$U_{B,max} = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}(3\times10^{-3})(1/73\times10^{-9})$$

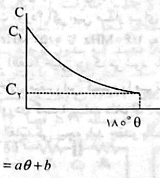
$$= 4/5\times10^{-9}\ \text{J}$$

●●۱۶- القاگری به دوسر خازنی که ظرفیت آن می‌تواند با چرخاندن دگمه‌ای تغییر کند، متصل است. می‌خواهیم کاری کنیم که بسامد نوسان‌های این مدار LC به طور خطی با زاویهٔ چرخش دگمه متناسب باشد و وقتی دگمه °۱۸۰ می‌چرخد بسامد از 2×10^5 Hz به 4×10^5 Hz تغییر کند. اگر L=۱/۰mH باشد، ظرفیت C مورد نیاز را برحسب تابعی از زاویهٔ چرخش دگمه رسم کنید.

حل:

$$f = a\theta + b$$

a و b اعداد ثابت هستند



$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = a\theta + b$$

$$\theta = 0 \Rightarrow f_1 = b = 2\times10^5\ \text{Hz}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow f_2 = 4\times10^5 = a(3/14) + 2\times10^5$$

$$\Rightarrow a = 6/37\times10^{4}\ \text{Hz/rad}$$

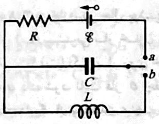
در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{4\pi^2(LC)} = (a\theta + b)^2 \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2L(a\theta+b)^2}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow C_1 = 1/27\times10^{-4}\ \text{F}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow C_2 = 1/27\times10^{-5}\ \text{F}$$

●●۱۷- در شکل ۲۷-۲۷ ، R=۱۴/۰Ω ، C=۶/۲۰μF و L=۵۴/۰mH و باتری آرمانی با emf برابر $\mathscr{E}$=۳۴/۰V است. کلید را برای مدتی طولانی در وضعیت a و سپس در وضعیت b قرارمی‌دهیم. (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ جریان نوسانی حاصل چقدر است؟



شکل ۲۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۷

حل: (الف) وقتی کلید به مدت طولانی روی a باشد بار روی خازن به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد و خازن اتصال باز می‌شود و هیچ جریانی را از خودش عبور نمی‌دهد.

$$Q = C\varepsilon = (6/2\times10^{-6})(34) = 2/11\times10^{-4}\ \text{C}$$

وقتی که کلید به نقطهٔ b وصل می‌شود یک مدار سادهٔ LC داریم.

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{54\times10^{-3})(6/2\times10^{-6})}} = 275\ \text{Hz}$$

(ب) دامنهٔ جریان را می‌توان از رابطهٔ $I = \omega Q$ به دست آورد.

$$I = \omega Q = 2\pi f Q = 2\pi(275)(2/11\times10^{-4}) = 0/365\ \text{A}$$

●●۱۸- یک مدار نوسانگر LC دارای دامنهٔ جریان ۷/۵۰mA ، دامنهٔ ولتاژ ۲۵۰mV و ظرفیت ۲۲۰nF است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) دورهٔ تناوب نوسان، (ب) بیشینهٔ انرژی ذخیره شده در خازن، (پ) بیشینهٔ انرژی ذخیره شده در القاگر، (ت) آهنگ بیشینه‌ای که با آن جریان تغییر می‌کند و (ث) آهنگ بیشینه‌ای که با آن القاگر انرژی می‌گیرد.

حل: (الف) ابتدا L را محاسبه می‌کنیم.

$$U_{max} = \frac{1}{2}CV_{max}^2 = \frac{1}{2}Li_{max}^2 \Rightarrow L = \frac{CV_{max}^2}{i_{max}^2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{(220\times10^{-9})(0/25)^2}{(7/5\times10^{-3})^2} = 2/44\times10^{-4}\ \text{H}$$

حال می‌توان دورهٔ تناوب را محاسبه کرد

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{(2/44\times10^{-4})(220\times10^{-9})} = 4/6\times10^{-5}\ \text{s}$$

(ب)

$$U_{max} = \frac{1}{2}CV_{max}^2 = \frac{1}{2}(220\times10^{-9})(0/25)^2 = 6/88\times10^{-9}\ \text{J}$$

(پ) بدیهی است که پاسخ دوباره برابر $6/88\times10^{-9}$ J می‌شود.

(ت)

$$V_{max} = L\left(\frac{di}{dt}\right)_{max} \Rightarrow \left(\frac{di}{dt}\right)_{max} = \frac{V_{max}}{L}$$

$$= \frac{0/25}{2/44\times10^{-4}} = 1/02\times10^{3}\ \text{A/s}$$

(ث)

$$i = i_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right) \Rightarrow \frac{di}{dt} = i_{max}\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

$$U = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

$$= Li_{max}^2\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

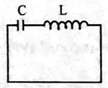
$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}Li_{max}^2\frac{2\pi}{T}\sin 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

موقعی که $\frac{dU}{dt}$ بیشینه است مقدار سینوس برابر یک است و داریم

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{max} = \frac{1}{2}(2/44\times10^{-4})(7/5\times10^{-3})^2\left(\frac{2\pi}{4/6\times10^{-5}}\right)$$

$$= 9/37\times10^{-4}\ \text{J/s}$$

●●۱۹- با به کاربردن قاعدهٔ حلقه، برای مدار LC معادلهٔ دیفرانسیلی به دست آورید (معادلهٔ ۲۷-۱۱ را ببینید).



حل: از قانون حلقه داریم

$$+L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

●●۲۰- در یک مدار LC نوسانی که در آن C=۴/۰۰μF است، بیشینهٔ اختلاف پتانسیل دو سرخازن در حین نوسان‌ها ۱/۵۰V و بیشینهٔ جریان عبوری از القاگر ۵۰/۰mA است. (الف) القاییدگی و (ب) بسامد نوسان‌ها چقدر است؟ (پ) برای اینکه بار روی خازن از صفر به مقدار بیشینه‌اش برسد چه مدت زمان مورد نیاز است؟

حل: (الف)

$$U_{max} = \frac{1}{2}CV_{max}^2 = \frac{1}{2}(4\times10^{-6})(1/5)^2 = 4/5\times10^{-6}\ \text{J}$$

$$U_{max}=\frac{1}{2}Li_{max}^2 \Rightarrow (4.5\times10^{-6})=\left(\frac{1}{2}\right)L(50\times10^{-3})^2$$
$$\Rightarrow L=3.6\times10^{-3}\ \mathrm{H}$$

(ب)

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{(3.6\times10^{-3})(4\times10^{-6})}}=1327\,\mathrm{Hz}$$

(پ) این زمان برابر $T/4$ است.

$$T=\frac{1}{f}=7.5\times10^{-4}\ \mathrm{s}$$
$$t=\frac{T}{4}=1.89\times10^{-4}\ \mathrm{s}$$

۲۱●●- ILW در یک مدار نوسانگر LC با $C=64.0\mu\mathrm{F}$ جریان با رابطهٔ $i=(1.60)\sin(2500t+0.680)$ داد می‌شود که در آن t برحسب ثانیه، i برحسب آمپر و ثابت فاز برحسب رادیان است. (الف) پس از $t=0$ جریان طی چه مدتی به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد؟ (ب) القاییدگی و (پ) انرژی کل چقدر است؟

حل: (الف) با مقایسه با رابطه $i=i_{max}\sin(\omega t+\theta_0)$ و با قرار دادن $\omega t+\theta_0=2500t+0.68=\frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت $t=3.56\times10^{-4}\ \mathrm{s}$.

(ب)

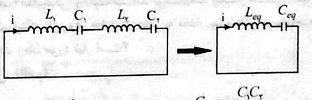
$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}\Rightarrow L=\frac{1}{\omega^2C}=\frac{1}{(2500)^2(64\times10^{-6})}=2.5\times10^{-3}\ \mathrm{H}$$

(پ)

$$U_{B,max}=\frac{1}{2}Li_{max}=\frac{1}{2}(2.5\times10^{-3})(1.6)^2=3.2\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

۲۲●●- یک مدار متوالی که شامل القاییدگی L_1 و ظرفیت C_1 است در بسامد زاویه‌ای ω نوسان می‌کند. مدار متوالی دیگری شامل القاییدگی L_2 و ظرفیت C_2 در همان بسامد زاویه‌ای نوسان می‌کند. بسامد زاویه‌ای نوسان مداری متوالی شامل هر چهار عنصر، برحسب ω چقدر است؟ از مقاومت چشم‌پوشی کنید. (*راهنمایی*: فرمولهای ظرفیت معادل و القاییدگی معادل را به کار برید؛ بخش ۲۱-۴ و مسئلهٔ ۴۷ در فصل ۲۶ را نگاه کنید.)

حل: مدار مورد نظر و مدار معادل آن به شکل زیر است



$$l_{eq}=l_1+l_2 \qquad C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

$$\omega_{eq}=\frac{1}{\sqrt{L_{eq}C_{eq}}}=\frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{(L_1+L_2)C_1C_2}}$$

از طرفی $\omega_1=\omega_1\Rightarrow L_1C_1=L_2C_2$ لذا خواهیم داشت:

$$\omega_{eq}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{(L_1C_1C_2+L_2C_2C_1}}=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{L_2C_2C_2+L_2C_2C_1}}$$
$$=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{L_2C_2(C_2+C_1)}}=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}=\omega$$

۲۳●●- در یک مدار نوسانگر LC، $L=25.0\mathrm{mH}$ و $C=7.80\mu\mathrm{F}$ است. در زمان $t=0$، جریان $9.2\mathrm{mA}$، بار روی خازن $3.80\mu\mathrm{C}$ و خازن در حال پرشدن است. (الف) انرژی کل در مدار، (ب) بیشترین بار خازن و (پ) بیشترین جریان چقدر است؟ (ت) اگر بار روی خازن با رابطهٔ $q=Q\cos(\omega t-\phi)$ داده شود، ثابت فاز ϕ چقدر است؟ (ث) فرض کنید همهٔ داده‌ها یکسان بمانند به جز اینکه خازن در $t=0$ در حال تخلیه شدن است، آنوقت ϕ چقدر است؟

حل: (الف)

$$U=U_E+U_B=\frac{q^2}{2C}+\frac{1}{2}Li^2$$
$$=\frac{(3.8\times10^{-6})^2}{2(7.8\times10^{-6})}+\frac{(25\times10^{-3})^2(9.2\times10^{-3})^2}{2}$$
$$=1.98\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

(ب) داریم $U_{max}=q^2{}_{max}/2C$

$$q_{max}=\sqrt{2CU_{max}}=\sqrt{2(7.8\times10^{-6})(1.98\times10^{-6})^2}$$
$$=5.56\times10^{-6}\ \mathrm{C}$$

(پ) از طرف دیگر داریم: $U_{max}=\frac{1}{2}Li^2{}_{max}$

$$i_{max}=\sqrt{\frac{2U_{max}}{L}}=\sqrt{\frac{2(1.98\times10^{-6})}{25\times10^{-3}}}=1.26\times10^{-2}\ \mathrm{A}$$

(ت) اگر q_0 بار در زمان $t=0$ باشد آنگاه $q=q_{max}\cos(\omega t+\phi)$ در $t=0$ چنین خواهد بود.

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{q_0}{q_{max}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3.8\times10^{-6}}{5.56\times10^{-6}}\right)=\pm46.89^\circ$$

بخش ۲۷-۵ نوسان‌های میرا در مدار RLC

۲۴●●- GO یک مدار تک حلقه شامل مقاومت 7.20Ω، القاگر $12.0\ \mathrm{H}$ و خازن $3.20\mu\mathrm{C}$ است. در ابتدا خازن دارای بار $6.2\mu\mathrm{C}$ و جریان صفر است. بار روی خازن را برای N چرخهٔ کامل بعدی برای (الف) $N=5$، (ب) $N=10$ و (پ) $N=100$ حساب کنید.

حل: بار q پس از N چرخهٔ کامل با قرار دادن $t=NT=2\pi N/\omega'$ در معادلهٔ زیر بدست می‌آید.

$$q=Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t+\phi)=Qe^{-RNT/2L}\cos[\omega'(2\pi N/\omega')+\phi]$$
$$=Qe^{-RN(2\pi\sqrt{LC}/2L}\cos(2\pi N/+\phi)$$
$$=Qe^{-R\pi N\sqrt{C/L}}\cos\phi$$

توجه داریم که مقدار بار اولیه ($N=0$ در معادلهٔ بالا قرار دهیم) برابر $q_0Q\cos\phi$ است که $q_0=6.2\mu\mathrm{C}$ داده شده است. بنابراین می‌توانیم نتیجه بالا را به صورت $q_N=q_0e^{-R\pi N\sqrt{C/L}}$ نوشت. برای مقادیر داده شدهٔ $R=7.2\Omega$, $C=3.2\times10^{-6}\ \mathrm{F}$ و $L=12\mathrm{H}$

(الف) به ازای $N=5$ خواهیم داشت $q_5=5.85\times10^{-6}\ \mathrm{C}$

(ب) به ازای $N=10$ داریم $q_{10}=5.52\times10^{-6}\ \mathrm{C}$

(پ) به ازای $N=100$ داریم $q_{100}=1.93\times10^{-6}\ \mathrm{C}$

۲۵●●- ILW چه مقاومت R باید به طور متوالی به القاییدگی $L=220\mathrm{mH}$ و ظرفیت $C=12.0\mu\mathrm{F}$ بسته شود تا اینکه بار بیشینهٔ روی خازن در 50.0 چرخه به ٪۹۹٫۰ مقدار اولیه‌اش کاهش یابد؟ (فرض کنید که $\omega'\approx\omega$ است.)

حل: بار بیشینهٔ روی خازن طبق رابطهٔ $q_{max}=Qe^{-Rt/2t}$ افت می‌کند که در اینجا t زمان لازم برای ۵۰ چرخه است.

$$t=50T=50\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=50(2\pi)\sqrt{LC}$$
$$=(50)(2\pi)\sqrt{(220\times10^{-3})(12\times10^{-6})}=0.51\ \mathrm{s}$$

حال طرفین را بر Q تقسیم و سپس انتگرال طبیعی می‌گیریم

$$\ln\left(\frac{q_{max}}{Q}\right)=-\frac{Rt}{2L}$$
$$R=-\frac{2L}{t}\ln\left(\frac{q_{max}}{Q}\right)=-\frac{2(220\times10^{-3})}{0.51\mathrm{s}}\ln0.99$$
$$=8.66\times10^{-3}\ \Omega$$

۲۶●●- در یک مدار RLC متوالی نوسانی، زمان لازم را برای اینکه انرژی بیشینهٔ موجود در طی یک نوسان به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش یابد، به دست آورید. فرض کنید که در $t=0$، $q=Q$ است.

حل: انرژی بیشینه در خازن برابر است با $q_{max}^2/2C$ و می‌خواهیم زمانی را به دست آوریم که در آن

$$\frac{q_{max}^2}{2C}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)\Rightarrow q_{max}=\frac{Q}{\sqrt{2}}$$

بار بیشینهٔ در خازن طبق رابطه $q_{max}=Qe^{-Rt/2t}$ کاهش می‌یابد و از آنجا داریم

$$\ln\left(\frac{q_{max}}{Q}\right)=-\frac{Rt}{2L}\Rightarrow\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{Rt}{2L}$$

$$t=-\frac{2L}{L}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{L}{R}\ln2$$

۲۷●●●- SSM در یک مدار RLC متوالی نوسانی، نشان دهید که کسر اتلاف انرژی در هر چرخهٔ نوسان، $\Delta U/U$، با تقریب خوبی با $2\pi R/\omega L$ داده می‌شود. کمیت $\omega L/R$ اغلب Q مدار نامیده می‌شود (**کیفیت**). مداری که در آن Q بالا باشد دارای مقاومت پایین و کسر اتلاف انرژی پایین در هر چرخه ($=2\pi/Q$) است.

حل: انرژی الکترومغناطیسی از زیر به دست می‌آید

$$U(t)-=\frac{Q}{2C}e^{-Rt/L}\cos^2(\omega' t+\phi)=U_{max}e^{-Rt/L}$$

که U_{max}، انرژی بیشینه مربوط به حالتی است که کسینوس برابر یک است. بعد از گذشت یک دوره انرژی برابر است با

$$U(t+T)=\frac{Q}{2C}e^{-R(t+T)/L}$$
$$\frac{|\Delta U|}{U}=\frac{|U(t+T)-U(t)}{U(t)}=\frac{U_{max}e^{-Rt/L}-U_{max}e^{-R(t+T)/L}}{U_{max}e^{-Rt/L}}$$

با فرض $\frac{RT}{L}<<1$ با استفاده از بسط e^{-x} خواهیم

$$e^{-RT/L}\cong1-\frac{RT}{L}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{|\Delta U|}{U}\cong1-(1-\frac{RT}{L}+...)\cong\frac{RT}{L}=\frac{2\pi R}{L\omega}$$

بخش ۲۷-۸ سه مدار ساده

۲۸●- یک خازن $1.50\mu\mathrm{F}$ مطابق شکل ۲۷-۱۰ به یک مولد ac با $\mathscr{E}\varepsilon_m=30.0\mathrm{V}$ متصل شده است. اگر بسامد emf برابر باشد با (الف) $1.00\mathrm{kHz}$ و (ب) $8.00\mathrm{kHz}$، دامنهٔ جریان متناوب حاصل چقدر است؟

حل: (الف)

$$i=\frac{V_C}{X_C}=\frac{\varepsilon_m}{1/\omega_dC}=\varepsilon_m\omega_dC=2\pi\varepsilon_mf_dC$$
$$=2\pi(30)(1\times10^3)(1.5\times10^{-6})=0.283\ \mathrm{A}$$

(ب) به ازای $f_d=8\times10^3\ \mathrm{Hz}$ داریم

$$i=2\pi(30)(8\times10^3)(1.5\times10^{-6})=2.26\ \mathrm{A}$$

۲۹●- ILW یک القاگر $50.0\mathrm{mH}$ مطابق شکل ۲۷-۱۲ به یک مولد ac با $\mathscr{E}_m=30.0\mathrm{V}$ متصل شده است. اگر بسامد emf برابر باشد با (الف) $1.00\mathrm{kHz}$ و (ب) $8.00\mathrm{kHz}$، دامنهٔ جریان متناوب حاصل چقدر است؟

حل: (الف)

$$i=\frac{V_L}{X_L}=\frac{\varepsilon_m}{\omega_dL}=\frac{\varepsilon_m}{2\pi f_dL}$$
$$=\frac{30}{2\pi(1\times10^3)(50\times10^{-3})}=0.095\ \mathrm{A}$$

(ب) به ازای $f_d=8\times10^3\ \mathrm{Hz}$

$$i=\frac{(۳۰)}{۲\pi(۸\times۱۰^{۳})(۵۰\times۱۰^{-۳})}=۰/۰۱۱۹\ \mathrm{A}$$

•۳۰- یک مقاومت ۵۰Ω مطابق شکل ۲۷-۸ به یک مولد ac با $\mathscr{E}_m=۳۰/۰\,\mathrm{V}$ متصل شده است. اگر بسامد emf برابر باشد با (الف) ۱/۰۰kHz و (ب) ۸/۰۰kHz ، دامنهٔ جریان متناوب حاصل چقدر است؟

حل: (الف) جریان عبوری از مقاومت برابر است با

$$i_m=\frac{\varepsilon_m}{R}=\frac{۳۰}{۵۰}=۰/۶\ \mathrm{A}$$

(ب) جریان عبوری از مقاومت ربطی به بسامد مولد ندارد و بنابراین دامنهٔ جریان همان $i_m=۰/۶\mathrm{A}$ است.

•۳۱- (الف) در چه بسامدی، القاگر ۶/۰mH و خازن ۱۰μF دارای واکنایی یکسان هستند؟ (ب) واکنایی چقدر خواهد بود؟ (پ) نشان دهید که این بسامد، بسامد طبیعی مدار نوسانی با L و C یکسان است.

حل: (الف) واکنایی القایی برابر $X_L=\omega_d L$ و واکنایی خازنی $X_C=۱/\omega_d C$ است. وقتی این دو با هم برابر شوند داریم $\omega_d=۱/\sqrt{LC}$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$f_d=\frac{\omega_d}{۲\pi}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۶\times۱۰^{-۳})(۱۰\times۱۰^{-۶})}}=۶۵۰\ \mathrm{Hz}$$

(ب) واکنایی القایی و خازنی در این بسامد با هم برابرند و داریم

$$X_c=X_L=\omega_d L=۲\pi f_d L=۲\pi(۶۵۰)(۶\times۱۰^{-۳})=۶۵۰\ \Omega$$

(پ) بسامد طبیعی نوسان‌های LC با رابطهٔ $f=\frac{\omega}{۲\pi}=۱/۲\pi\sqrt{LC}$ داده می‌شود کدام قسمت (الف) محاسبه شد.

••۳۲- نیروی محرکهٔ الکتریکی یک مولد ac برابر است با $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin\omega_d t$ که در آن $\mathscr{E}_m=۲۵/۰\,\mathrm{V}$ و $\omega_d=۳۷۷\,\mathrm{rad/s}$ است. این مولد به یک القاگر ۱۲/۷ H متصل است. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان چقدر است؟ (ب) وقتی جریان بیشینه است، emf مولد چقدر است؟ (پ) وقتی emf مولد برابر ۱۲/۵V- است و بزرگی آن افزایش می‌یابد، جریان چقدر است؟

حل: (الف) در اینجا $\varepsilon_m=V_L$ لذا می‌توان نوشت

$$L=\frac{V_L}{X_L}=\frac{\varepsilon_m}{L\omega_d}=\frac{۲۵}{(۱۲/۷)(۳۷۷)}=۵/۲۲\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{A}$$

(ب) اختلاف فاز بین جریان و نیروی محرکه $\pi/۲$ است. بنابراین وقتی جریان بیشینه است، نیروی محرکه صفر است.

(پ)

$$\varepsilon=\varepsilon_m\sin\omega_d t\Rightarrow -۱۲/۵=۲۵\sin\omega_d t$$

$$\sin\omega_d t=-۰/۵\Rightarrow|\cos\omega_d t|=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$i=I_m\sin\left(\omega_d t-\frac{\pi}{۲}\right)=I\,|\cos\omega_d t|$$

$$i=(۵/۲۲\times۱۰^{-۳})\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۴/۵۲\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{A}$$

••۳۳- SSM نیروی محرکهٔ الکتریکی یک مولد ac برابر است با $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin(\omega_d t-\pi/۴)$ که در آن $\mathscr{E}_m=۳۰/۰\,\mathrm{V}$ و $\omega_d=۳۵۰\,\mathrm{rad/s}$. جریان ایجاد شده در مدار متصل به آن برابر است با $i(t)=I\sin(\omega_d t-\pi/۴)$ که در آن $I=۶۲۰\,\mathrm{mA}$. در چه زمانی پس از $t=۰$ ، (الف) emf مولد برای بار اول به بیشینه می‌رسد و (ب) جریان برای بار اول به بیشینه می‌رسد؟ (پ) مدار شامل فقط یک تک عنصر دیگر به جز مولد است. این عنصر خازن است یا القاگر یا مقاومت؟ پاسخ خود را توجیه کنید. (ت) در هر حالت، مقدار ظرفیت، القاییدگی یا مقاومت چقدر است؟

حل: (الف) نیروی محرکه الکتریکی مولد وقتی بیشینه است که $\varepsilon=\varepsilon_m$ باشد از آنجا داریم

$$\varepsilon=\varepsilon_m\sin\left(\omega_d t-\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow\varepsilon=۳۰\sin\left(۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\sin\left(۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}\right)=۱\Rightarrow ۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\pm۲\pi n$$

که در آن n یک عدد صحیح است. برای اینکه نخستین بار پس از $t=۰$ ، نیروی محرکهٔ الکتریکی بیشینه باشد باید $n=۰$ را قرار دهیم در نتیجه داریم:

$$۳۵۰t-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t=۶/۷۳\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{s}$$

(ب) جریان وقتی بیشینه باشد که $i=I_m$ باشد و ضمناً جریان به اندازه $\pi/۲$ نسبت به نیروی محرکهٔ الکتریکی عقب‌تر است در نتیجه داریم:

$$i=I_m\sin\left(۳۵۰t-\frac{۳\pi}{۴}\right)$$

$$\sin\left(۳۵۰t-\frac{۳\pi}{۴}\right)=۱\Rightarrow ۳۵۰t-\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\pm۲\pi n$$

که به ازای $n=۰$ خواهیم داشت:

$$t=۱/۱۲\times۱۰^{-۲}\ \mathrm{s}$$

(پ) چون جریان نسبت به ولتاژ تاخیر فاز دارد بنابراین عنصر دیگر مدار باید یک القاگر باشد

(ت) مدار فقط شامل یک القاگر است لذا باید فقط القاییدگی آن را محاسبه کنیم

$$X_L=\frac{V_L}{L}=\frac{\varepsilon_m}{L}=\frac{۳۰}{۰/۶۲}=۴۸/۴\Omega$$

$$X_L=L\omega_d\Rightarrow۴۸/۴=L(۳۵۰)\Rightarrow L=۰/۱۳۸\mathrm{H}$$

••۳۴- یک مولد ac با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin\omega_d t$ که در آن $\mathscr{E}_m=۲۵/۰\,\mathrm{V}$ و $\omega_d=۳۷۷\,\mathrm{rad/s}$ به یک خازن ۴/۱۵μF متصل شده است. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان چقدر است؟ (ب) وقتی جریان بیشینه است، emf مولد چقدر است؟ (پ) وقتی emf مولد برابر ۱۲/۵V- است و بزرگی آن افزایش می‌یابد، جریان چقدر است؟

حل: (الف) چون مدار فقط شامل خازن است لذا اختلاف پتانسیل دو سر آن باید با نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر باشد. لذا خواهیم داشت:

$$i_{max}=\frac{V_C}{X_C}=\frac{\varepsilon_{max}}{۱/\omega_d C}=\varepsilon_{max}\omega_d C$$
$$=(۲۵)(۳۷۷)(۴/۱۵\times۱۰^{-۶})=(۳/۹۱\times۱۰^{-۲})\ \mathrm{A}$$

(ب) چون جریان به اندازهٔ $\pi/۲$ نسبت به نیروی محرکه جلوتر است، هنگامی که جریان بیشینه است، نیروی محرکه صفر است.

(پ)

$$\varepsilon=۲۵\sin ۳۷۷t$$

$$-۱۲/۵=۲۵\sin۳۷۷t\Rightarrow\sin۳۷۷t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos۳۷۷t=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$i=۳۹/۱\sin\left(۳۷۷t+\frac{\pi}{۲}\right)=۳۹/۱\cos۳۷۷t$$

چون نیروی محرکه در حال افزایش است، $\frac{d\varepsilon}{dt}>۰$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=(۲۵)(۳۷۷)\cos۳۷۷t$$

شرط مثبت بودن $\frac{d\varepsilon}{dt}$ این است که $\cos۳۷۷t>۰$ باشد،پس

$$i=(۰/۰۳۹۱)\left(+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۳/۳۸۶\times۱۰^{-۲}\ \mathrm{A}$$

بخش ۲۷-۹ مقدار RLC متوالی

•۳۵- ILW پیچه‌ای با القاییدگی ۸۸mH و مقاومت نامعلوم و یک خازن ۰/۹۴μF به طور متوالی به یک emf متناوب با بسامد ۹۳۰Hz متصل‌اند. اگر ثابت فاز بین ولتاژ اعمال شده و جریان برابر °۷۵ باشد، مقاومت پیچه چقدر است؟

حل:

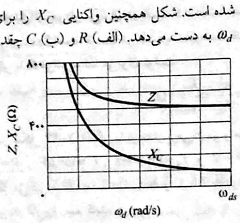
$$\omega_d=۲\pi f_d=۲\pi(۹۳۰)=۵۸۴۰/۴\ \mathrm{rad/s}$$

$$X_L=\omega_d L=(۵۸۴۰/۴)(۸۸\times۱۰^{-۳})=۵۱۴\Omega$$

$$X_C=\frac{۱}{\omega_d C}=\frac{۱}{(۵۸۴۰/۴)(۰/۹۴\times۱۰^{-۶})}=۱۸۲/۲\Omega$$

$$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}\Rightarrow\tan۷۵^\circ=\frac{۵۱۴-۱۸۲/۲}{R}$$
$$\Rightarrow R=۸۹\Omega$$

•۳۶- یک منبع متناوب با بسامد متغیر، یک خازن با ظرفیت C و یک مقاومت با مقاومت R به طور متوالی به هم متصل‌اند. شکل ۲۷-۲۸ مقاومت ظاهری Z مدار را برحسب بسامد زاویه‌ای محرک ω_d به دست می‌دهد؛ منحنی در ۵۰۰Ω به مجانب می‌رسد. مقیاس محور افقی با $\omega_{ds}=۳۰۰\,\mathrm{rad/s}$ مشخص شده است. شکل همچنین واکنایی X_C را برای خازن برحسب ω_d به دست می‌دهد. (الف) R و (ب) C چقدرند؟



شکل ۲۷-۲۸ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف) در مدار القاگر وجود ندارد و فقط مقاومت و خازن داریم و چون مقاومت خازنی با بسامد زاویه‌ای کاهش می‌یابد در نتیجه مقدار مجانبی Z باید برابر با مقاومت باشد یعنی $R=۵۰۰\Omega$.

(ب)

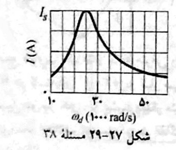
$$C=\frac{۱}{\omega_d X_c}=\frac{۱}{(۵۰)(۵۰۰)}=۴۰\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{F}$$

•۳۷- یک موتور الکتریکی وقتی با بار کار می‌کند دارای مقاومت مؤثر ۳۲/۰Ω و واکنایی القایی ۴۵/۰Ω است. ولتاژ rms دو سر منبع تناوبی ۴۲۰ V است. جریان rms را حساب کنید.

حل:

$$I_{rms}=\frac{\varepsilon_{rms}}{Z}=\frac{\varepsilon_{rms}}{\sqrt{R^۲+X_L^۲}}=\frac{۴۲۰}{\sqrt{(۴۵)^۲+(۳۲)^۲}}=۷/۶\mathrm{A}$$

•۳۸- دامنهٔ جریان I برحسب بسامد زاویه‌ای محرک ω_d برای یک مدار RLC در شکل ۲۷-۲۹ داده شده که در آن مقیاس محور قائم با $I_s=۴/۰۰\mathrm{A}$ مشخص شده است. القاییدگی برابر ۲۰۰μH و دامنهٔ emf برابر ۸/۰V است. (الف) C و (ب) R چقدرند؟



شکل ۲۷-۲۹ مسئلهٔ ۳۸

حل: (الف) با توجه به نمودار، بسامد زاویه‌ای تشدید برابر ۲۵۰۰۰rad/s است اذا خواهیم داشت

$$\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}\Rightarrow C=\frac{۱}{L\omega^۲}=\frac{۱}{(۲۰۰\times۱۰^{-۶})(۲۵۰۰۰)^۲}$$
$$C=۸\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{F}$$

(ب) همچنین از نمودار می‌توان دریافت که دامنهٔ جریان در تشدید برابر A ۴ است. ضمناً در تشدید مقاومت ظاهری Z کاملاً برابر با R می‌شود، لذا می‌توان نوشت

$$R = Z = \frac{\varepsilon_m}{I_m} = \frac{۸}{۴} = ۲\Omega$$

●۳۹- در شکل ۲۷-۷، القاگر را از مدار برمی‌داریم و مقدارهای $R=۲۰۰\Omega$ ، $C=۱۵۰\mu F$ ، $f_d = ۶۰/۰\,Hz$ و $\varepsilon_m = ۳۶/۰\,V$ را در نظر می‌گیریم. (الف) Z، (ب) ϕ و (پ) I چقدرند؟ (ت) نمودار بردار فاز را رسم کنید.

حل: (الف) در اینجا $X_L = ۰$ ، در حالیکه $R = ۲۰۰\Omega$ و

$$X_C = \frac{۱}{\omega_d C} = \frac{۱}{۲\pi f_d C} = \frac{۱}{۲\pi(۶۰)(۱۵\times۱۰^{-۶})} = ۱۷۷\,\Omega$$

باقی می‌ماند و مقاومت ظاهری چنین است

$$Z = \sqrt{R^۲ + X_C^۲} = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + (۱۷۷)^۲} = ۲۶۷\Omega$$

(ب) زاویهٔ فاز برابر است با

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{-۱۷۷}{۲۰۰}\right) = -۴۱/۵^\circ$$

(پ) دامنهٔ جریان برابر است با

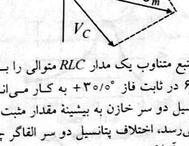
$$I = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۶۷} = ۰/۱۳۵\ A$$

(ت) نخست دامنه‌های ولتاژ دو سر عنصرهای مدار را به دست می‌آوریم

$$V_R = IR = (۰/۱۳۵)(۲۰۰) = ۲۷\ V$$

$$V_C = IX_C = (۰/۱۳۵)(۱۷۷) = ۲۳/۹\ V$$

مدار، خازنی است و در نتیجه I از ε_m جلو می‌افتد. نمودار بردار فاز چنین خواهد بود.



●۴۰- یک منبع متناوب یک مدار RLC متوالی را با دامنهٔ emf برابر $۶/۰۰V$ در ثابت فاز $+۳۰/۰^\circ$ به کار می‌اندازد. وقتی اختلاف پتانسیل دو سر خازن به بیشینهٔ مقدار مثبت خود برابر $+۵/۰۰V$ می‌رسد، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر چقدر است (شامل علامت آن)؟

حل:

$$\cos\phi = \frac{V_R}{\varepsilon_m} \qquad \sin\phi = \frac{V_L - V_C}{\varepsilon_m}$$

$$\sin ۳۰ = \frac{V_L - ۵}{۶} \Rightarrow V_L = ۸\ V$$

●۴۱- SSM در شکل ۲۷-۷، مقدارهای $R=۲۰۰\Omega$ ، $C=۷۰/۰\mu F$ ، $L = ۲۳۰\,mH$ ، $f_d = ۶۰/۰\,Hz$ و $\mathscr{E}_m = ۳۶/۰V$ را در نظر می‌گیریم. (الف) Z، (ب) ϕ و (پ) I، چقدرند؟ نمودار بردار فاز را رسم کنید.

حل: (الف)

$$X_L = \omega_d L = ۲\pi f_d L = ۲\pi(۶۰)(۲۳۰\times۱۰^{-۳}) = ۸۶/۷\Omega$$

$$X_C = \frac{۱}{\omega_d C} = \frac{۱}{۲\pi f_d C} = \frac{۱}{۲\pi(۶۰)(۷۰\times۱۰^{-۶})} = ۳۷/۹\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_c)^۲} = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + (۸۶/۷ - ۳۷/۹)^۲} = ۲۰۶\Omega$$

(ب)
$$\phi = \tan^{-۱} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{۸۶/۷ - ۳۷/۹}{۲۰۰} = ۱۳/۷^\circ$$

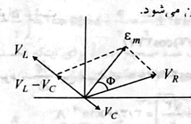
(پ)
$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۰۶} = ۰/۱۷۵\,A$$

(ت)
$$V_R = I_m R = (۰/۱۷۵) = ۳۵\,V$$

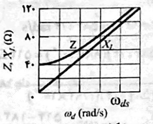
$$V_L = I_m X_L = (۰/۱۷۵)(۸۶/۷) = ۱۵/۲\,V$$

$$V_C = I_m X_C = (۰/۱۷۵)(۳۷/۹) = ۶/۶۲\,V$$

ضمناً چون $X_L > X_C$ است لذا ε_m جلوتر از I_m می‌افتد و نمودار فاز چنین می‌شود.



●۴۲- یک منبع متناوب با بسامد متغیر، یک القاگر با القایدگی L و یک مقاومت R به طور متوالی به هم متصل‌اند. شکل ۲۷-۳۰ مقاومت ظاهری Z مدار را برحسب بسامد زاویه‌ای محرک ω_d به دست می‌دهد. مقیاس محور افقی با $\omega_{ds} = ۱۶۰۰ rad/s$ مشخص شده است. شکل همچنین واکنایی X_L را برای القاگر برحسب ω_d به دست می‌دهد. (الف) R و (ب) L چقدرند؟



شکل ۲۷-۳۰ مسئلهٔ ۳۸

حل: (الف) در $\omega_d = ۰$ ، $X_L = \omega_d L = ۰$، در نتیجه

$$Z = R = ۴۰$$

(ب) در بسامدهای بالا $X_L = \omega_d L >> R$ و $Z \cong X_L$ می‌گردد به ازای $\omega_d = ۲۰۰۰ rad/s$ از منحنی داریم $X_L = ۱۲۰\Omega$ لذا خواهیم داشت

$$L = \frac{X_L}{\omega_d} = \frac{۱۲۰}{۲۰۰۰} = ۰/۰۶H$$

●۴۳- در شکل ۲۷-۷، خازن را از مدار برمی‌داریم و مقدارهای $R=۲۰۰\Omega$ ، $L=۲۳۰mH$ ، $f_d = ۶۰/۰Hz$ و $\varepsilon_m = ۳۶/۰\,V$ را در نظر می‌گیریم. (الف) Z، (ب) ϕ و (پ) I چقدرند؟ (ت) نمودار فاز را رسم کنید.

حل: (الف) در اینجا $X_C = ۰$ و داریم

$$X_L = \omega L = ۲\pi f_d L = ۲\pi(۶۰۰)(۰/۲۳) = ۸۶/۷\,\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^۲ + X_L^۲} = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + (۸۶/۷)^۲} = ۲۱۸\Omega$$

(ب)
$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \left(\frac{۸۶/۷ - ۰}{۲۰۰}\right) = ۲۳/۴^\circ$$

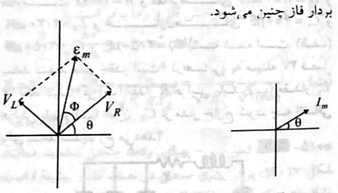
(پ)
$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۱۸} = ۰/۱۶۵\ A$$

(ت) ابتدا دامنه‌های ولتاژ دو سر عنصرهای مدار را به دست می‌آوریم

$$V_R = I_m R = (۰/۱۶۵)(۲۰۰) = ۳۳\ V$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۳۶}{۲۱۸} = ۰/۱۶۵\,A$$

یک مدار القایی داریم لذا ε_m از I_m جلو می‌افتد و نمودار بردار فاز چنین می‌شود.



●●۴۴- GO یک مولد ac با $\mathscr{E}_m = ۲۲۰V$ که در $۴۰۰Hz$ کار می‌کند، نوسان‌هایی در مدار RLC متوالی با $R = ۲۲۰\Omega$ ، $L = ۱۵۰\,mH$ و $C = ۲۴/۰\,\mu F$ به وجود می‌آورد. مطلوب است (الف) واکنایی خازنی X_C ، (ب) مقاومت ظاهری Z و (پ) دامنهٔ جریان i . سپس خازن دیگری را با ظرفیت یکسان به طور متوالی به سایر اجزا می‌بندیم. معین کنید که آیا (ت) X_C، (ث) Z و (ج) I افزایش می‌یابند یا کاهش یا یکسان باقی می‌مانند؟

حل: (الف)

$$X_C = \frac{۱}{\omega_d C} = \frac{۱}{۲\pi f_d L} = \frac{۱}{۲\pi(۴۰۰)(۲۴\times۱۰^{-۶})} = ۱۶/۵۹\Omega$$

$$X_L = \omega_d L = ۲\pi f_d L = ۲\pi(۴۰۰)(۰/۱۵) = ۳۷۶/۸\Omega$$

(ب)

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲} = \sqrt{(۲۲۰)^۲ - (۳۷۶/۸ - ۱۶/۵۹)^۲}$$

$$= ۴۲۲/۱\Omega$$

(پ)
$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۲۲۰}{۴۲۲/۱} = ۰/۵۲۱\,A$$

(ت) اگر خازن دیگری معادل خازن اول به مدار اضافه شود. ظرفیت کل مدار نصف و X_C دو برابر می‌شود.

(ث)

$$Z = \sqrt{(۲۰۰)^۲ + [۳۷۶/۸ - ۲\times(۱۶/۵۹)]^۲} = ۴۰۸\Omega < ۴۲۲\Omega$$

(ج) چون Z کاهش یافته است، I افزایش می‌یابد.

●●۴۵- (الف) در یک مدار RLC، آیا دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر می‌تواند بزرگتر از دامنهٔ مولد emf باشد؟ (ب) یک مدار RLC را با $\mathscr{E}_m = ۱۰V$ ، $R = ۱۰\Omega$ ، $L = ۱/۰H$ و $C = ۱/۰\,\mu F$ در نظر بگیرید. دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر در تشدید چقدر است؟

حل: (الف) بله، دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر می‌تواند بزرگتر از دامنهٔ مولد $\varepsilon_m f$ باشد.

(ب) در حالت تشدید داریم

$$\omega_d = \omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۱)(۱\times۱۰^۹)}} = ۱۰۰۰\,rad/s$$

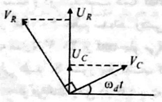
$$Z = R \Rightarrow I_m = \frac{\varepsilon_m}{R} = ۱\,A$$

$$X_L = \omega_d L = (۱۰۰۰)(۱) = ۱۰۰۰\,\Omega$$

$$V_L = I_m X_L = (۱)(۱۰۰۰) = ۱۰۰۰\,V$$

●●۴۶- یک منبع emf تناوبی با بسامد متغیر f_d به طور متوالی به مقاومت $۵۰/۰\Omega$ و خازن $۲۰/۰\mu F$ بسته شده است. دامنهٔ emf برابر $۱۲/۰\,V$ است. (الف) نمودار بردار فاز را برای بردار فاز V_R (پتانسیل دو سر مقاومت) و بردار فاز V_C (پتانسیل دو سر خازن) رسم کنید. (ب) در کدام بسامد محرک f_d دو بردار فاز دارای طول یکسان هستند؟ در این بسامد محرک، (پ) زاویهٔ فاز برحسب درجه، (ت) تندی زاویه‌ای که بردارهای فاز با آن می‌چرخند و (ث) دامنهٔ جریان، چقدرند؟

حل: (الف)



(ب)

$$R = X_C = \frac{۱}{\omega_d C} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱}{\omega_d(۲۰\times۱۰^{-۶})} \Rightarrow \omega_d = ۱۰۰۰\,rad/s$$

$$\omega_d = ۲\pi f_d \Rightarrow ۱۰۰۰ = ۲\pi f_d \Rightarrow f_d = ۱۵۹/۲Hz$$

(پ)

$$\phi = \tan^{-۱}\left(-\frac{V_C}{V_R}\right) = \tan^{-۱}(-۱) = -۴۵^\circ$$

(ت) در قسمت (ب) به دست آمد $\omega_d = ۱۰۰۰\,rad/s$

(ث) $I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲ + X_c^۲}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}R} = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}(۵۰)} = ۰/۱۷\,A$

۴۷••- SSM WWW یک مدار RLC همانند مدار شکل ۲۷-۷ دارای $R = ۵/۰۰\,\Omega$ ، $C = ۲۰/۰\,\mu F$ ، $L = ۱/۰۰\,H$ و $\mathscr{E}_m = ۳۰/۰\,V$ است. (الف) در کدام بسامد زاویه‌ای ω_d دامنهٔ جریان مقدار بیشینهٔ خود را همانند منحنی‌های تشدید شکل ۲۷-۱۶ خواهد داشت؟ (ب) مقدار این بیشینه چقدر است؟ در کدام (پ) بسامد زاویه‌ای پایین‌تر $\omega_{d۱}$ و (ت) بسامد زاویه‌ای بالاتر $\omega_{d۲}$، دامنهٔ جریان نصف این مقدار بیشینه خواهد بود؟ (ث) کسر نیم پهنای $[=(\omega_{d۱} - \omega_{d۲})/\omega]$ منحنی تشدید برای این مدار چقدر است؟

حل: (الف) در بسامد زاویه‌ای تشدید، دامنهٔ در مدار بیشینه است.

$$\omega_d = \omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۱)(۲۰\times۱۰^{-۶})}} = ۲۲۴\,rad/s$$

(ب) وقتی $\omega_d = \omega$ است $Z = R$ و در نتیجه دامنهٔ جریان برابر است با

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{R} = \frac{۳۰}{۵} = ۶\,A$$

(پ) و (ت) می‌خواهیم مقادیر مثبت ω_d را به گونه‌ای به دست آوریم که $I_m = \frac{\varepsilon_m}{۲R}$ باشد.

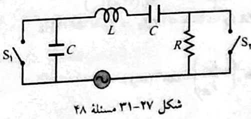
$$\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲ + \left(\omega_d L - \frac{۱}{\omega_d c}\right)^۲}} = \frac{\varepsilon_m}{۲R}$$

طرفین را مجذور کرده و معادله درجه دو برای ω_d حل کنیم خواهیم داشت $\omega_{d,۱} = ۲۱۹/۳\,rad/s$ و $\omega_{d,۲} = ۲۲۷/۹\,rad/s$.

(ث) کسر نیم- پنهای تشدید چنین می‌شود

$$\frac{\omega_{d,۲} - \omega_{d,۱}}{\omega} = \frac{۲۲۷/۹ - ۲۱۹/۳}{۲۲۳/۶} = ۰/۰۳۴$$

۴۸••- GO شکل ۲۷-۳۱ یک مدار RLC را نشان می‌دهد که شامل دو خازن مشابه و دو کلید است. دامنهٔ emf در $۱۲/۰\,V$ و بسامد محرک در $۶۰/۰\,Hz$ تنظیم شده‌اند. وقتی دو کلید باز هستند، جریان به اندازهٔ $۳۰/۹°$ از emf جلو می‌افتد. وقتی کلید $S_۱$ بسته شود ولی کلید $S_۱$ هنوز باز باشد، emf به اندازهٔ $۱۵/۰°$ از جریان جلو می‌افتد. وقتی دو کلید بسته شوند، دامنهٔ جریان برابر $۴۴۷\,mA$ است. (الف) R، (ب) C و (پ) L چقدرند؟



شکل ۲۷-۳۱ مسئلهٔ ۴۸

حل: (الف) وقتی دو کلید باز هستند مدار RLC داریم:

$$\omega = ۲\pi f = ۲\pi(۶۰) = ۳۷۶/۸\,rad/s$$

$\phi_۱ = -۳۰/۹°$ $\quad X_C > X_L$

(۱) $\tan(-۳۰/۹°) = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow X_C - X_L = ۰/۵۹۸R$

وقتی $S_۱$ بسته و $S_۲$ باز است خازن از مدار خارج می‌شود

$\phi_۲ = ۱۵°$

(۲) $\tan(۱۵°) = \frac{X_L}{R} \Rightarrow X_L = ۰/۲۶۸R$

وقتی هر دو کلید بسته شدند، مقاومت و خازن هر دو از مدار خارج می‌شوند.

$$X_L = \frac{\varepsilon_m}{I_m} = \frac{۱۲}{۰/۴۴۷} = ۲۶/۸\,\Omega$$

از رابطهٔ (۲)

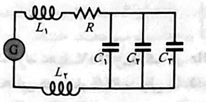
$$R = \frac{X_L}{۰/۲۶۸} = \frac{۲۶/۸}{۰/۲۶۸} = ۱۰۰\,\Omega$$

(ب) از رابطهٔ (۱)

$$X_C - ۲۶/۸ = (۰/۵۹۸)(۱۰۰) \Rightarrow X_C = ۳/۱\times۱۰^{-۵}\,F$$

(پ) $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{۲۶/۸}{۳۷۶/۸} = ۰/۰۷۱H$

۴۹••- در شکل ۲۷-۳۲، مولدی با بسامد نوسان قابل تنظیم به مقاومت $R = ۱۰۰\,\Omega$ و القاگرهای $L_۱ = ۱/۷۰\,mH$ و $L_۲ = ۲/۳۰\,mH$ و خازن‌های $C_۱ = ۴۰۰\,\mu F$ و $C_۲ = ۲/۵۰\,\mu F$ و $C_۳ = ۳/۵۰\,\mu F$ بسته شده است. (الف) بسامد تشدید مدار چقدر است؟ (*راهنمایی:* به مسئله ۴۷ فصل ۲۶ نگاه کنید.) اگر (ب) مقدار R افزایش یابد، (پ) مقدار $L_۱$ افزایش یابد و (ت) خازن $C_۳$ از مدار خارج شود، چه اتفاقی برای بسامد تشدید رخ می‌دهد؟



شکل ۲۷-۳۲ مسئلهٔ ۴۹

حل:

$$L_{eq} = L_۱ + L_۲ = ۱/۷ + ۲/۳ = ۴\,mH$$
$$C_{eq} = C_۱ + C_۲ + C_۳ = ۴ + ۲/۵ + ۳/۵ = ۱۰\,\mu F$$

(الف)

$$f_d = \frac{\omega_d}{۲\pi} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{L_{eq}C_{eq}}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{(۴\times۱۰^{-۳})(۱۰\times۱۰^{-۶})}} = ۷۹۶\,Hz$$

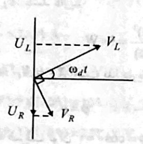
(ب) با تغییر R، بسامد تشدید f_d تغییری نمی‌کند.

(پ) اگر $f_۱$ افزایش یابد L_{eq} افزایش می‌یابد و در نتیجه f_d کم می‌شود.

(ت) اگر $C_۳$ از مدار خارج شود، C_{eq} کاهش می‌یابد و در نتیجه f_d افزایش می‌یابد.

۵۰••- یک منبع emf متناوب با بسامد متغیر f_d به طور متوالی به یک مقاومت $۸۰/۰\,\Omega$ و القاگر $۴۰/۰\,mH$ متصل است. دامنهٔ emf برابر $۶/۰۰\,V$ است. (الف) نمودار بردار فاز را برای بردار فاز V_R (پتانسیل دو سر مقاومت) و بردار فاز V_L (پتانسیل دو سر القاگر) رسم کنید. (ب) در کدام بسامد محرک f_d دو بردار فاز طول یکسانی دارند؛ در این بسامد محرک، مطلوب است (پ) زاویهٔ فاز برحسب درجه، (ت) تندی زاویه‌ای که بردارهای فاز با آن می‌چرخند و (ث) دامنهٔ جریان.

حل: (الف)



(ب) $V_R = V_L \Rightarrow IR = IX_L \Rightarrow R = \omega_d L = ۲\pi f_d L$

$$\Rightarrow f_d = \frac{R}{۲\pi L} = \frac{۸۰}{۲\pi(۴۰\times۱۰^{-۳})} = ۳۱۸/۳\,Hz$$

(پ) $\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{V_L}{V_R}\right) = \tan^{-۱}(۱) = ۴۵°$

(ت) تندی زاویه‌ای چرخش فاز و رها برابر است با

$$\omega_d = \frac{R}{L} = \frac{۸۰}{۴۰\times۱۰^{-۳}} = ۲\times۱۰^۳\,rad/s$$

(ث) $R = X_L \Rightarrow I_m \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲ + X_L^۲}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}R} = \frac{۶}{\sqrt{۲}(۸۰)}$
$= ۰/۰۵۳\,A$

۵۱••- SSM کسر نیم - پهنای $\Delta\omega_d$ منحنی تشدید همانند شکل ۲۷-۱۶، برابر پهنای منحنی در نصف مقدار بیشینهٔ I است. نشان دهید که $\Delta\omega_d/\omega = R(۳C/L)^{۱/۲}$ ، که در آن ω بسامد زاویه‌ای در تشدید است. توجه کنید که نسبت $\Delta\omega_d/\omega$ ، همان‌طور که شکل ۲۷-۱۳ می‌دهد، با R افزایش می‌یابد.

حل: به حل مسئله ۴۵ مراجعه نمایید.

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{۱}{۲}\frac{\varepsilon_m}{R} \Rightarrow Z = ۲R$$

$$R^۲ + (X_L - X_C)^۲ = ۴R^۲ \Rightarrow X_L - X_C = \pm\sqrt{۳}R$$

$$L\omega_d - \frac{۱}{Cw_d} = \sqrt{۳}R \Rightarrow CL\omega_d^۲ \pm \sqrt{۳}RC\omega_d - ۱ = ۰$$

$$\omega_{d,۱} = \frac{-\sqrt{۳}Rc + \sqrt{۳R^۲C^۲ - ۴LC}}{۲LC},$$

$$\omega_{d,۲} = \frac{-\sqrt{۳}Rc + \sqrt{۳R^۲C^۲ - ۴LC}}{۲LC}$$

$$\frac{\Delta\omega_d}{\omega} = \frac{\omega_{d,۲} - \omega_{d,۱}}{\omega} = \frac{۲\sqrt{۳}Rc\sqrt{LC}}{۲LC} = R\sqrt{\frac{۳C}{L}}$$

که با استفاده از داده‌های مسئله ۴۵ خواهیم داشت

$$\frac{\Delta\omega_d}{\omega} = (۵)\sqrt{\frac{۳(۲۰\times۱۰^{-۶})}{۱}} = ۳/۸۷\times۱۰^{-۲}$$

بخش ۱۷-۱۰ توان در مدارهای جریان متناوب

۵۲•- یک ولت سنج ac با مقاومت ظاهری بزرگ به نوبت به دو سر القاگر، خازن و مقاومت در یک مدار متوالی که دارای emf متناوب $۱۰۰\,V$ (rms) است بسته می‌شود؛ در هر نوبت ولت سنج عدد یکسانی را نشان می‌دهد. این عدد چقدر است؟

حل:

$$V_R = V_L = V_C$$

با توجه به اینکه $V_L = V_C$ است، مدار در حالت تشدید است در این حالت داریم

$$V_R = \varepsilon = ۱۰۰\,V$$

$$V_L = V_C = V_R = ۱۰۰\,V$$

۵۳•- یک دستگاه تهویهٔ مطبوع که به یک خط ac با ولتاژ rms برابر $۱۲۰\,V$ متصل است معادل با یک مقاومت $۱۲/۰\,\Omega$ و یک واکنایی القایی $۱/۳۰\,\Omega$ است که به طور متوالی بسته شده باشند. مطلوب است محاسبهٔ (الف) مقاومت ظاهری دستگاه تهویه و (ب) آهنگ میانگینی که با آن انرژی به این دستگاه داده می‌شود.

حل: (الف) $Z = \sqrt{(۱۲)^۲ + (۱/۳)^۲} = ۱۲/۱\Omega$

(ب) $P = RI_{rms}^۲ = R\frac{V^۲}{Z^۲} = (۱۲)\frac{(۱۲۰)^۲}{(۱۲/۱)^۲} = ۱۱۹۰\,W$

۵۴•- مقدار بیشینهٔ یک ولتاژ ac که مقدار rms آن $۱۰۰\,V$ است، چقدر است؟

حل: $V_{max} = \sqrt{۲}V_{max} = \sqrt{۲}(۱۰۰) = ۱۴۱/۴\,V$

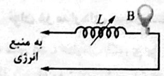
۵۵•- چه مقدار جریان مستقیم در یک مقاومت معین مقدار گرمایی یکسان با جریان متناوبی با مقدار بیشینهٔ $۲/۶۰\,A$ ، تولید می‌کند؟

حل:

$$i_{rms} = \frac{i_{max}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲/۶}{\sqrt{۲}} = ۱/۸۴\,A$$

۵۶••- یک «کم کنندهٔ نور» نوعی که برای کم کردن نور صحنهٔ تئاتر به کار می‌رود شامل یک القاگر متغیر L است (که القایدگی آن بین صفر و L_{max} قابل تنظیم است) و به طور متوالی مطابق شکل ۲۷-۳۳ به لامپ B بسته شده است. منبع الکتریکی $۱۲۰\,V$ (rms) در $۶۰/۰\,Hz$ است؛ لامپ در $۱۲۰\,V$ و $۱۰۰۰\,W$ کار می‌کند. (الف) اگر آهنگ اتلاف انرژی در لامپ

با ضریب ۵ از حد بالای $۱۰۰۰\,W$ تغییر کند، L_{max} مورد نیاز چقدر است؟ فرض کنید مقاومت لامپ مستقل از دمای آن است. (ب) آیا می‌توان به جای القاگر از مقاومت متغیر (که بین صفر و R_{max} قابل تنظیم است) استفاده کرد؟ در این صورت R_{max} مورد نیاز چقدر است؟ چرا این کار انجام نمی‌گیرد؟



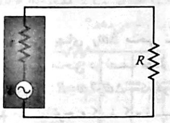
شکل ۲۷-۳۳ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف)
$$P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow ۱۰۰۰=\frac{(۱۲۰)^۲}{R}\Rightarrow R=۱۴/۴\Omega$$
$$\overline{P}=\frac{۱۰۰۰}{۵}=۲۰۰\ W$$
$$\overline{P}=RI^۲_{rms}\Rightarrow ۲۰۰=۱۴/۴I^۲_{rms}\Rightarrow I_{rms}=۳/۷۳\,A$$
$$Z=\frac{V_{rms}}{I_{rms}}=\frac{۱۲۰}{۳/۷۳}=۳۲/۱۷\Omega$$
$$Z=\sqrt{R^۲+X^۲_L}\Rightarrow ۳۲/۱۷=\sqrt{(۱۴/۴)^۲+X^۲_L}\Rightarrow X_L=۲۸/۷۷\Omega$$
$$X_L=L_{max}\omega_d=L_{max}۲\pi f_d$$
$$\Rightarrow ۲۸/۷=L_{max}=۷۶/۴\times ۱۰^{-۳}\ H$$
(ب) و (پ) اگر بخواهیم از مقاومت استفاده نماییم
$$R_{کل}=R_۱+R\Rightarrow ۳۲/۱۷=R_۱+۱۴/۴\Rightarrow R_۱=۱۷/۸\Omega$$
(ت) این کار مناسب نیست چون توان اتلافی این مقاومت زیاد است.

●●۵۷- SSM در یک مدار RLC مانند مدار شکل ۲۷-۷، فرض کنید که $R=۵۰۰\Omega$ ، $L=۶۰/۰mH$ ، $f_d=۶۰/۰Hz$ و $\mathscr{E}_m=۳۰/۰V$ است. برای چه مقدارهایی از ظرفیت، آهنگ متوسط اتلاف انرژی در مقاومت (الف) بیشینه و (ب) کمینه خواهد بود؟ (پ) بیشینهٔ آهنگ اتلاف و (ت) زاویهٔ فاز و (ث) ضریب توان مربوط چقدر است؟ (ج) کمینهٔ آهنگ اتلاف و (چ) زاویهٔ فاز و (ح) ضریب توان مربوط چقدر است؟

حل:
$$P_{ave}=\varepsilon_{rms}I_{rms}\frac{R}{Z}$$
$$=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}}\frac{\varepsilon_m/\sqrt{۲}}{\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)}}\frac{R}{\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲}}$$
$$=\frac{\varepsilon^۲{}_m R}{۲[R^۲+(X_L-X_C)^۲]}$$
(الف) از رابطهٔ بالا در می‌یابیم که بیشترین آهنگ اتلاف انرژی به ازای کمترین مقدار مخرج که از $X_L=X_C$ به دست می‌آید، حاصل می‌شود. این همان شرط تشدید است و بنابراین داریم:
$$L\omega_d=\frac{۱}{c\omega_d}\Rightarrow C=\frac{۱}{L\omega^۲_d}=\frac{۱}{۴\pi^۲Lf^۲_d}$$
$$C=\frac{۱}{۴\pi^۲(۶۰\times ۱۰^{-۳})(۶۰)}=۱/۱۷\times ۱۰^{-۴}\ F$$
(ب) توان در جایی کمینه است که Z بیشترین مقدار خود را داشته باشد. بدیهی است هر چه اختلاف X_C و X_L بیشتر باشد مخرج بزرگتر می‌شود. بیشترین اختلاف این وقتی است که $X_C\rightarrow\infty$ و یا $C\rightarrow ۰$ میل کند.
(پ) وقتی $X_L=X_C$ باشد داریم
$$P_{ave}=\frac{\varepsilon^۲_m}{۲R}=\frac{(۳۰)^۲}{۲(۵)}=۹۰W$$
(ت) در توان بیشینه $X_L=X_C$ است لذا داریم
$$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=۰\qquad \phi=۰$$
(ث) در توان بیشینه ضریب توان $\cos\phi=\cos ۰=۱$ می‌شود.
(ج) کمینه توان میانگین به ازای $X_C\rightarrow\infty$ به دست می‌آید و از آنجا $P_{ave}=۰$ می‌شود.
(چ) چون $\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}$ است لذا وقتی میل کند $X_C\rightarrow\infty$ و در نتیجه $\tan\phi=-\infty$ و در نتیجه می‌شود.
(ح) در توان کمینه، ضریب توان $\cos\phi=\cos(-۹۰^\circ)=۰$ می‌شود.

●●۵۸- برای شکل ۲۷-۳۴، نشان دهید که وقتی مقاومت R با مقاومت داخلی r مولد ac برابر باشد، آهنگ میانگینی که با آن انرژی در مقاومت R تلف می‌شود بیشینه است.



شکل ۲۷-۳۴ مسئله‌های ۵۸ و ۶۶

حل:
$$\varepsilon_m=I_{rms}R_{eq}\Rightarrow I_{rms}=\frac{\varepsilon_m}{R+r}$$
$$P=RI^۲_{rms}=R\frac{\varepsilon^۲_m}{(R+r)^۲}$$
وقتی توان نسبت به R بیشینه می‌شود که $\frac{dP}{dR}=۰$ باشد.
$$\frac{dP}{dR}=\frac{\varepsilon_m[(R+r)^۲-۲(R+r)]}{(R+r)^۴}=\frac{\varepsilon^۲_m(r-R)}{(R+r)^۴}=۰\Rightarrow r=R$$

●●۵۹- در شکل ۲۷-۷، $R=۱۵/۰\,\Omega$ ، $C=۴/۷۰\,\mu F$ و $L=۲۵/۰\,mH$ است. مولدی یک emf با ولتاژ rms $۷۵/۰V$ و بسامد $۵۵۰Hz$ ایجاد می‌کند. (الف) rms جریان چقدر است؟ مطلوب است محاسبه ولتاژ rms در دو سر (ب) R ، (پ) C ، (ت) L ، (ث) C و L با هم و (ج) R ، C و L با هم. با چه آهنگ میانگینی انرژی به وسیلهٔ (چ) R ، (ح) C و (خ) L تلف می‌شود؟

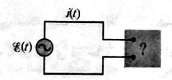
حل:
$$\omega_d=۲\pi f_d=۲\pi(۵۵۰)=۳۴۵۴\,rad/s$$
$$X_C=\frac{۱}{Cw_d}=\frac{۱}{(۴/۷\times ۱۰^{-۶})(۳۴۵۴)}=۶۱/۶\Omega$$
$$X_L=Lw_d=(۲۵\times ۱۰^{-۳})(۳۴۵۴)=۸۶/۴\Omega$$
$$Z=\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲}=\sqrt{(۱۵)^۲+(۸۶/۴-۶۱/۶)^۲}=۲۹\Omega$$
(الف) $$I_{rms}=\frac{\varepsilon_{rms}}{Z}=\frac{۷۵}{۲۹}=۲/۵۹\ A$$
(ب) $$V_R=RI_{rms}=(۱۵)(۲/۵۹)=۳۸/۸\ V$$
(پ) $$V_C=X_CI_{rms}=(۶۱/۶)(۲/۵۹)=۱۵۹/۵\ V$$
(ت) $$V_L=X_LI_{rms}=(۸۶/۴)(۲/۵۹)=۲۲۳/۷\ V$$
(ث) $$V_{L,C}=(X_L-X_C)I_{rms}=(۲۲۳/۷-۱۵۹/۵)=۶۴/۲\ V$$
(ج) $$V_Z=\sqrt{V^۲_R+V^۲_{L,C}}=\sqrt{(۳۸/۸)^۲+(۶۴/۲)^۲}=۷۵\ V$$
(چ) $$P_R=\frac{V^۲_R}{R}=\frac{(۳۸/۸)^۲}{۱۵}=۹۹/۹\ W$$
(ح) هیچ اتلاف انرژی‌ای در خازن وجود ندارد.
(خ) هیچ اتلاف انرژی‌ای در القاگر وجود ندارد.

●●۶۰- GO در یک مدار RLC نوسانی متوالی، $R=۱۶/۰\Omega$ ، $C=۳۱/۲\mu F$ ، $L=۹/۲۰\,mH$ و $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin\omega_d t$ با $\mathscr{E}_m=۴۵/۰V$ و $\omega_d=۳۰۰۰rad/s$ است. برای زمان $t=۰/۴۴۲ms$ ، مطلوب است (الف) آهنگ P_g که با آن انرژی به وسیلهٔ مولد تأمین می‌شود، (ب) آهنگ P_C که با آن انرژی در خازن تغییر می‌کند و (پ) آهنگ P_L که با آن انرژی در القاگر تغییر می‌کند و (ت) آهنگ P_R که با آن انرژی در مقاومت تلف می‌شود. (ث) آیا جمع P_C ، P_L و P_R بزرگتر از P_g است یا کوچکتر یا برابر با آن است؟

حل: جریان در مدار از رابطه $i(t)=I\sin(\omega_d t-\phi)$ پیروی می‌کند که در آن
$$I=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^۲+(\omega_d L-۱/\omega_d C)^۲}}$$
که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $I=۱/۹۳A$ و
$$\phi=\tan^{-۱}\left(\frac{X_L-X_C}{R}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{\omega_d L-۱/\omega_d c}{R}\right)$$
که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $\phi=۴۶/۵^\circ$

(الف) توان تامین شده توسط مولد برابر است با
$$P_g=i(t)\varepsilon(t)=I\sin(\omega_d t-\phi)\varepsilon_m\sin\omega_d t$$
$$=(۱/۹۳)(۴۵)\sin[(۳۰۰)(۰/۴۴۲)-۴۶/۵]$$
$$\sin[(۳۰۰۰)(۰/۴۴۲)]$$
$$=۴۱/۴W$$
(ب) آهنگی که با آن انرژی در خازن تغییر می‌کند برابر است با
$$V_C=X_ci$$
$$U_C=\frac{۱}{۲}CV^۲_C=\frac{۱}{۲}CX^۲_CI^۲\sin^۲(\omega_d t-\phi)$$
$$P_C=-\frac{dU_C}{dt}=-\frac{۱}{۲}CX^۲_CI^۲۲\omega_d\sin(\omega_d t-\phi)\cos(\omega_d t-\phi)$$
$$=-C\frac{۱}{C^۲\omega^۲_d}I^۲\omega_d\sin(\omega_d t-\phi)\cos(\omega_d-\phi)$$
که پس از جاگذاری مقادیر داده شده خواهیم داشت
$$P_C=-۱۷W$$
(پ) آهنگی که با آن انرژی در القاگر تغییر می‌کند برابر است با
$$U_L=\frac{۱}{۲}Li^۲=\frac{۱}{۲}LI^۲\sin^۲(\omega_d t-\phi)$$
$$P_L=-\frac{dU_L}{dt}=LI^۲\omega\sin(\omega_d t-\phi)\cos(\omega_d t-\phi)$$
که پس از جاگذاری مقادیر داده شده خواهیم داشت
$$P_L=۴۴W$$
(ت) آهنگی که با آن انرژی در مقاومت تلف می‌شود برابر است با
$$P_R=Ri^۲=RI^۲\sin^۲(\omega_d t-\phi)$$
$$=(۱۶)(۱/۹۳)^۲\sin^۲[(۳۰۰۰)(۰/۴۴۲)-۴۶/۵]=۱۴/۴W$$
(ث)
$$P_C+P_L+P_R=-۱۷+۴۴+۱۴/۴=۴۱/۴W$$
که برابر P_g است.

●●۶۱- SSM WWW شکل ۲۷-۳۵ یک مولد ac را نشان می‌دهد که از طریق یک زوج پایانه به یک «جعبهٔ سیاه» متصل است. جعبه شامل یک مدار RLC است، که حتی ممکن است مداری چند حلقه‌ای باشد که اجزای آن و چگونگی اتصال آنها را نمی‌دانیم. اندازه‌گیرهای خارج جعبه رابطه‌های زیر را به دست می‌دهند
$$\varepsilon(t)=(۷۵/۰\ V)\sin\omega_d t$$
و
$$i(t)=(۱/۲۰A)\sin(\omega_d t+۴۲/۰^\circ)$$
(الف) ضریب توان چقدر است؟ (ب) آیا جریان نسبت به emf جلو می‌افتد یا عقب می‌ماند؟ (پ) آیا مدار داخل جعبه بیشتر القایی است یا خازنی؟ (ت) آیا جریان در جعبه در تشدید است؟ (ث) آیا باید در جعبه خازن، (ج) القاگر یا (چ) مقاومت وجود داشته باشد؟ (ح) با چه آهنگ میانگینی انرژی به وسیلهٔ مولد به جعبه داده می‌شود؟ (خ) چرا برای پاسخ این پرسش‌ها نیاز به دانستن ω_d ندارید؟



شکل ۲۷-۳۵ مسئله ۶۱

حل: (الف) ضریب توان $\cos\phi$ است که در آن ϕ ثابت فاز است که با رابطهٔ $i = I\sin(\omega t+\phi)$ تعریف می‌شود. بنابراین $\cos\phi = \cos(-۴۲°) = ۰/۷۴۳$ و داریم $\phi = -۴۲/۰°$

(ب) چون $\phi < ۰$ است جریان از نیروی محرکه جلو می‌افتد.

(پ) چون جریان جلوتر از نیروی محرکه است، مدار در مجموع خازنی است.

(ت) در حالت تشدید $\phi = ۰$ است و چون در اینجا $\phi \neq ۰$ است لذا مدار در حالت تشدید نیست .

(ث) بله در مدار حتماً خازن وجود دارد.

(ج) ممکن است القاگر وجود داشته باشد.

(چ) حتماً مقاومت در مدار وجود دارد.

(ح) $P_{ave} = \frac{۱}{۲}\varepsilon_m I\cos\phi = \frac{۱}{۲}(۷۵)(۱/۲)(۰/۷۴۳) = ۳۳/۴۴\,W$

(خ) پاسخ‌های بالا از طریق ثابت فاز ϕ به بسامد زاویه‌ای مربوطند بنابراین با دانستن ϕ دیگر نیازی به دانستن W_d نیست.

بخش ۲۷-۱۱ مبدل‌ها

•۶۲- مولدی $۱۰۰V$ را برای پیچهٔ اولیهٔ یک مبدل ۵۰ دور تأمین می‌کند. اگر پیچهٔ ثانویه دارای ۵۰۰ دور باشد، ولتاژ ثانویه چقدر است؟

حل:

$$V_s = V_p\left(\frac{N_s}{N_p}\right) = (۱۰۰)\left(\frac{۵۰۰}{۵۰}\right) = ۱۰۰$$

•۶۳- WWW SSM مبدلی دارای اولیهٔ ۵۰۰ دور و ثانویهٔ ۱۰ دور است. (الف) اگر V_p برابر $۱۲۰V$ (rms) باشد، با فرض باز بودن مدار، V_s چقدر است؟ (ب) حال اگر ثانویه به بار مقاومتی ۱۵Ω بسته شود، جریان‌ها در اولیه و ثانویه چقدرند؟

حل: (الف) $V_s = V_p\left(\frac{N_s}{N_p}\right) = (۱۲۰)\left(\frac{۱۰}{۵۰۰}\right) = ۲/۴\,V$

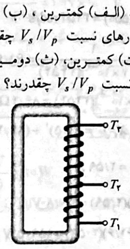
(ب) و (پ) طبق قانون اهم، جریان در ثانویه برابر است با

$$I_s = \frac{V_s}{R_s} = \frac{۲/۴}{۱۵} = ۰/۱۶\,A$$

و برای جریان اولیه داریم

$$I_p = I\left(\frac{N_s}{N_p}\right) = (۱۰۰)\left(\frac{۱۰}{۵۰۰}\right) = ۳/۲\times۱۰^{-۳}\,A$$

•۶۴- شکل ۲۷-۳۶ یک «مبدل خودکار» را نشان می‌دهد. این مبدل شامل یک تک پیچه (با هستهٔ آهنی) است. سه اتصال T_i در نظر گرفته شده است. بین اتصال‌های $T_۱$ و $T_۲$، ۲۰۰ دور و بین $T_۲$ و $T_۳$، ۸۰۰ دور وجود دارند. هر دو اتصال را می‌توان به عنوان پایانهٔ اولیه یا پایانهٔ ثانویه در نظر گرفت. برای ایجاد مبدل افزاینده، (الف) کمترین ، (ب) دومین کمترین و (پ) بزرگترین مقدارهای نسبت V_s/V_p چقدرند؟ برای ایجاد مبدل کاهنده، (ت) کمترین، (ث) دومین کمترین و (ج) بیشترین مقدارهای نسبت V_s/V_p چقدرند؟



شکل ۲۷-۳۶ مسئلهٔ ۶۴

حل: (الف) کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p با استفاده از $T_۲T_۳$ به عنوان پایانهٔ اولیه و با استفاده از $T_۱T_۳$ به عنوان پایانهٔ ثانویه پیچه به دست می‌آید:

$$\frac{V_{۱۳}}{V_{۲۳}} = \frac{۸۰۰+۲۰۰}{۸۰۰} = ۱/۲۵$$

(ب) دومین کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p با استفاده از $T_۱T_۲$ به عنوان پایانه اولیه و با استفاده از $T_۲T_۳$ به عنوان پایانهٔ ثانویه پیچه به دست می‌آید.

$$\frac{V_{۲۳}}{V_{۱۲}} = \frac{۸۰۰}{۲۰۰} = ۴/۰$$

(پ) بزرگترین مقدار نسبت V_s/V_p با استفاده از $T_۱T_۲$ به عنوان پایانهٔ اولیه و با استفاده از $T_۱T_۳$ به عنوان ثانویهٔ پیچه به دست می‌آید.

$$\frac{V_{۱۳}}{V_{۱۲}} = \frac{۸۰۰+۲۰۰}{۲۰۰} = ۵/۰$$

برای مبدل کاهنده کافی است که پیچه‌های اولیه و ثانویه را در بالا تعویض کنیم.

(ت) کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p برابر است با

$$\frac{V_{۱۲}}{V_{۱۳}} = \frac{۲۰۰}{۸۰۰+۲۰۰} = ۰/۲$$

(ث) دومین کوچکترین مقدار نسبت V_s/V_p چنین می‌شود.

$$\frac{V_{۱۲}}{V_{۲۳}} = \frac{۲۰۰}{۸۰۰} = ۰/۲۵$$

(ج) بزرگترین مقدار نسبت V_s/V_p برابر است با

$$\frac{V_{۲۳}}{V_{۱۳}} = \frac{۸۰۰}{۸۰۰+۲۰۰} = ۰/۸$$

•۶۵- یک مولد ac برای بار مقاومتی در کارخانهٔ دوری به وسیلهٔ دو کابل خط انتقال emf را فراهم می‌کند. در کارخانه

یک مبدل کاهنده ولتاژ را از مقدار انتقالی V_t(rms) به مقدار خیلی کمتری کاهش می‌دهد تا برای کار در کارخانه ایمن و راحت باشد. مقاومت خط انتقال $۰/۳۰\Omega$ برای هر کابل و توان مولد $۲۵۰kW$ است. اگر $V_t = ۸۰kV$ باشد، (الف) کاهش ولتاژ ΔV در خط انتقال و (ب) آهنگ P_d اتلاف انرژی به صورت گرمایی چقدرند؟ اگر $V_t = ۸/۰kV$ باشد، (پ) ΔV و (ت) P_d چقدرند؟ اگر $V_t = ۰/۸۰kV$ باشد، (ث) ΔV و (ج) P_d چقدرند؟

حل: (الف) جریان rms در هر کابل برابر است با

$$I_{rms} = \frac{P}{V_t} = \frac{۲۵۰\times۱۰^۳}{۸۰\times۱۰^۳} = ۳/۱۲۵\,A$$

در نتیجه ولتاژ rms که در دو کابل افت می‌کند برابر است با

$$\Delta V = I_{rms}(۲R) = (۳/۱۲۵)(۲)(۰/۳) = ۱/۸۸\,V$$

(ب) $P_d = RI_{rms}^۲ = (۰/۶)(۳/۱۲۵)^۲ = ۵/۸۶\,W$

(پ) $I_{rms} = \frac{۲۵۰\times۱۰^۳}{۸\times۱۰^۳} = ۳۱/۲۵\,A$

از آنجا برای افت ولتاژ rms داریم

$$\Delta V = (۳/۱۲۵)(۰/۶) = ۱۸/۸\,V$$

(ت) $P_d = (۳/۱۲۵)^۲(۰/۶) = ۵/۸۶\times۱۰^۲\,W$

(ث) $I_{rms} = \frac{۲۵۰\times۱۰^۳}{۰/۸\times۱۰^۳} = ۳۱۲/۵\,A$

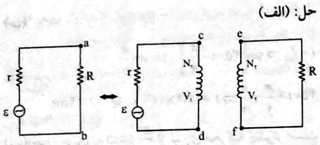
$$\Delta V = (۳۱۲/۵)(۰/۶) = ۱۸۸\,V$$

(ج) $P_d = (۳۱۲/۵)^۲(۰/۶) = ۵/۸۶\times۱۰^۴\,W$

مسئله‌های اضافی

•۶۶- در شکل ۲۷-۳۴ فرض می‌کنیم که جعبهٔ مکعبی شکل در سمت چپ نشان‌دهندهٔ خروجی یک تقویت کنندهٔ صوتی (با مقاومت ظاهری بالا) با $r=۱۰۰۰\Omega$ باشد. فرض می‌کنیم $R=۱۰\Omega$ نشان‌دهندهٔ پیچهٔ یک بلندگو (با مقاومت ظاهری پایین) است. برای انتقال بیشترین انرژی به بار R باید داشته باشیم $R=r$ که در این حالت چنین نیست. اما، مبدل می‌تواند برای «تبدیل» مقاومت‌ها به کار رود، آنها از نظر الکتریکی طوری رفتار می‌کنند که گویا از مقدار واقعی بزرگتر یا کوچکترند. (الف) پیچه‌های اولیه و ثانویهٔ یک مبدل را به گونه‌ای طرح کنید که بتوانند بین تقویت کننده و بلندگوی شکل ۲۷-۳۴ مقاومت‌های ظاهری تطبیق شده‌ای ایجاد کنند. (ب) نسبت دورها باید چقدر باشد؟

حل: (الف)



(ب) خروجی را به جای آنکه از b و a بگیریم از c و d می‌گیریم.

اگر $r=R$ بود توان منتقل شده به مقاومت R بیشینه بود. اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت در این حالت $V = \frac{\varepsilon}{۲}$ می‌شد. در صورتی که اختلاف پتانسیل دو مقاومت R در شکل (الف) برابر است با:

$$V_{ab} = R\frac{\varepsilon}{r+R}$$

حال مبدلی می‌خواهیم تا اختلاف پتانسیل V_{ab} را به V تبدیل کند.

$$\frac{N_۱}{N_۲} = \frac{V'}{V} = \frac{R\frac{\varepsilon}{r+R}}{\frac{E}{۲}} = \frac{۲R}{r+R}$$

$$\frac{N_۱}{N_۲} = \frac{(۲)(۱۰)}{۱۰۰۰+۱۰} = \frac{۲۰}{۱۰۱۰} = \frac{۲}{۱۰۱} = ۱/۹۸\times۱۰^{-۲}$$

$$\frac{N_۲}{N_۱} = ۵۰/۵$$

۶۷- یک مولد ac نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m\sin(\omega_d t - \pi/۴)$ را ایجاد می‌کند که در آن $\mathscr{E}_m = ۳۰/۰V$ و $\omega_d = ۳۵۰rad/s$ و جریانی که در مدار متصل به مولد برقرار می‌شود با رابطهٔ $i(t) = I\sin(\omega_d t + \pi/۴)$ داده می‌شود که در آن $I = ۶۲۰mA$ است. (الف) در چه زمانی پس از $t=۰$ emf مولد به اولین بیشینه می‌رسد؟ (ب) در چه زمانی پس از $t=۰$ جریان برای اولین بار به بیشینه می‌رسد؟ (پ) مدار به جز مولد به یک عنصر دیگر متصل است. آیا این عنصر یک خازن، یک القاگر یا یک مقاومت است؟ جواب خود را توجیه کنید. (ت) مقدار ظرفیت، القایدگی یا مقاومت را بسته به اینکه کدام مورد پاسخ است پیدا کنید.

حل:

$$\varepsilon = ۳۰/۰\sin\left(۳۵۰t - \frac{\pi}{۴}\right)$$

$$i = ۰/۶۲\sin\left(۳۵۰t + \frac{\pi}{۴}\right)$$

(الف)

$$\varepsilon = \varepsilon_m \Rightarrow \sin\left(۳۵۰t - \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲}$$

$$۳۵۰t - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow t = ۶/۷۳\times۱۰^{-۳}\,s \quad \text{یا} \quad ۶/۷۳\,ms$$

(ب)

$$i = I_m \Rightarrow \sin\left(۳۵۰t - \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲}$$

$$۳۵۰t + \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow t = ۲/۲۴\times۱۰^{-۳}\ \text{s} \quad \text{یا} \quad ۲/۲۴\text{ms}$$

(پ) چون جریان به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ از نیروی محرکه جلوتر است (تقدیم فاز دارد) پس عنصر خازن می‌باشد.

$$X_C = \frac{\varepsilon_m}{i_m} = \frac{(۳۰)}{(۰/۶۲)} = ۴۸/۴\Omega$$

۶۸- یک مدار RLC متوالی به وسیلهٔ مولدی در بسامد ۲۰۰۰Hz و دامنهٔ emf برابر ۱۷۰V به کار می‌افتد. القاییدگی ۶۰/۰mH ، ظرفیت ۰/۴۰۰μF و مقاومت برابر ۲۰۰Ω است. (الف) ثابت فاز برحسب رادیان چقدر است؟ (ب) دامنهٔ جریان چقدر است؟

حل: (الف)

$$\omega_d = ۲\pi f_d = (۲)(۳/۱۴)(۲۰۰۰) = ۱/۲۵۶\times۱۰^۴\ \text{rad/s}$$

$$X_L = L\omega_d = (۶۰\times۱۰^{-۳})(۱/۲۵۶\times۱۰^۴) = ۷۵۳/۶\ \Omega$$

$$X_C = \frac{۱}{C\omega_d} = \frac{۱}{(۰/۴\times۱۰^{-۶})(۱/۲۵۶\times۱۰^۴)} = ۱۹۹\ \Omega$$

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(۷۵۳/۶ - ۱۹۹)}{(۲۰۰)} = ۲/۷۷$$

$$\varphi = ۷۰/۲^\circ$$

(ب)

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow Z = \frac{(۲۰۰)}{\cos ۷۰/۲} = ۵۹۰/۴\ \Omega$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{(۱۷۰)}{۵۹۰/۴} = ۰/۲۹\ A$$

۶۹- مولدی با بسامد ۳۰۰۰Hz یک مدار RLC متوالی را با emf برابر ۱۲۰V به کار می‌اندازد. مقاومت برابر ۴۰/۰Ω، ظرفیت برابر ۱/۶۰μF و القاییدگی برابر ۸۵۰μH است. (الف) ثابت فاز برحسب رادیان و (ب) دامنهٔ جریان چقدرند؟ (پ) آیا مدار خازنی است یا القایی یا در تشدید است؟

حل:

$$\omega_d = ۲\pi f_d = (۲)(۳/۱۴)(۳۰۰۰) = ۱/۸۸\times۱۰^۴\ \text{rad/s}$$

$$X_C = \frac{۱}{C\omega_d} = \frac{۱}{(۱/۶۰\times۱۰^{-۶})(۱/۸۸\times۱۰^۴)} = ۳۳/۲\Omega$$

$$X_L = L\omega = (۸۵۰\times۱۰^{-۶})(۱/۸۸\times۱۰^۴) = ۱۶\Omega$$

(الف)

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(۱۶ - ۳۳/۲)}{(۴۰)} = -۰/۴۳$$

$$\varphi = -۲۳/۳^\circ \quad \text{یا} \quad -۰/۴۰۶\text{rad}$$

(ب)

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow ۰/۹۸ = \frac{(۴۰)}{Z}$$

$$Z = ۴۳/۶\Omega$$

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{(۱۲۰)}{(۴۳/۶)} = ۲/۷۵\text{A}$$

(پ) چون $X_C > X_L$ می‌باشد. مدار خازنی است. (φ منفی می‌باشد.)

۷۰- القاگر ۴۵/۰mH دارای واکنایی ۱/۳۰kΩ است. (الف) بسامد کاری آن چقدر است؟ (ب) با واکنایی یکسان در آن بسامد، ظرفیت خازن چقدر است؟ اگر بسامد دو برابر شود، واکنایی جدید (پ) القایی و (ت) خازنی چقدر است؟

حل: (الف) با استفاده از $X_L = ۱/\omega_d C = ۱/۲\pi f_d C$ ، بسامد f_d را به دست می‌آوریم.

$$f_d = \frac{X_L}{۲\pi L} = \frac{۱/۳۰\times۱۰^۳}{۲\pi(۴۵/۰\times۱۰^{-۳})} ۴/۶۰\times۱۰^۳\ \text{Hz}$$

(ب) ظرفیت با استفاده از $X_C = ۱/\omega_d C = ۱/۲\pi f_d C$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه در اینجا $X_C = X_L$ است،خواهیم داشت:

$$C = \frac{۱}{۲\pi f_d X_L} = \frac{۱}{۲\pi(۴۵/۰\times۱۰^۳)(۱/۳۰\times۱۰^۳)}$$
$$= ۲۶/۶۲\text{nF}$$

(پ) و (ت) توجه کنید که $X_L \propto f_d$ و $X_C \propto ۱/f_d$ است. بنابراین اگر f_d دو برابر شود، X_L دو برابر و X_C نصف می‌شود. بنابراین به ترتیب داریم

$$X'_L = ۲(X_L) = ۲(۱/۳۰\times۱۰^۳\ \Omega) = ۲/۶۰\times۱۰^۳\ \Omega$$

$$X'_C = X_C/۲ = (۱/۳۰\times۱۰^۳\ \Omega)/۲ = ۶/۵۰\times۱۰^۲\ \Omega$$

۷۱- یک مدار RLC به وسیلهٔ مولدی با دامنهٔ emf برابر ۸۰/۰V و دامنهٔ جریان ۱/۲۵A به کار می‌افتد. جریان به مقدار ۰/۶۵۰ rad از emf جلوتر است. (الف) مقاومت ظاهری و (ب) مقاومت مدار چقدرند؟ (پ) آیا مدار القایی است یا خازنی یا در تشدید است؟

حل: (الف) مقاومت ظاهری برابر است با

$$Z = \varepsilon_m/I = (۸۰/۰)/(۱/۲۵) = ۶۴/۰\Omega$$

(ب) با استفاده از $\cos\phi = R/Z$، مقاومت R را به دست می‌آوریم

$$R = Z\cos\phi = (۶۴/۰\Omega)\cos(۰/۶۵۰\ \text{rad}) = ۵۰/۹\Omega$$

(پ) چون جریان از نیروی محرکهٔ جلو می‌افتد، نتیجه می‌گیریم که مدار خازنی است.

۷۲- یک مدار RLC متوالی به گونه‌ای به کار می‌افتد که ولتاژ بیشینهٔ دو سر القاگر ۱/۵۰ برابر ولتاژ بیشینهٔ دوسر خازن و ۲

برابر ولتاژ بیشینهٔ دوسر مقاومت است. (الف) ϕ برای مدار چقدر است؟ (ب) آیا مدار القایی است یا خازنی یا در تشدید است؟ مقاومت برابر ۴۹/۹Ω و دامنهٔ جریان برابر ۲۰۰mA است. (پ) دامنهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی چقدر است؟

حل: (الف) از معادلهٔ ۲۷-۶۵ داریم

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{V_L - (V_L/۱/۵۰)}{(V_L/۲/۰۰)}\right)$$

$$= \tan^{-۱}\frac{۲}{۳} = ۳۳/۷^\circ \quad \text{یا} \quad ۰/۵۸۸\ \text{rad}$$

(ب) چون $\phi = ۰$ است نتیجه می‌گیریم که $X_L > X_C$ و در نتیجه مدار القایی است.

(پ) داریم $V_R = IR = (۲۰۰\times۱۰^{-۳})(۴۹/۹) = ۹/۹۸\text{V}$ و بنابراین V_L و V_C به ترتیب چنین می‌شوند:

$$V_L = ۲/۰۰V_R = ۱۹/۹۸\text{V} \quad \text{و} \quad V_C = V_L/۱/۵۰ = ۱۳/۳\text{V}$$

بنابراین با استفاده از معادلهٔ ۲۷-۶۰ خواهیم داشت

$$? = \sqrt{V_R^۲ + (V_L - V_C)^۲}$$
$$= \sqrt{(۹/۹۸)^۲ + (۱۹/۹۸ - ۱۳/۳)^۲} = ۱۲/۰\ \text{V}$$

۷۳- خازنی با ظرفیت ۱۵۸μF و یک القاگر تشکیل مدار LC را می‌دهند که با دامنهٔ جریان ۴/۲۱mA در ۸/۱۵ kHz نوسان می‌کند. (الف) القاییدگی، (ب) انرژی کل در مدار و (پ) بار بیشینهٔ روی خازن چقدرند؟

حل: (الف) با استفاده از $\omega = ۱/\sqrt{LC}$ برای L خواهیم داشت:

$$L = \frac{۱}{\omega^۲ C} = \frac{۱}{(۲\pi f)^۲ C} = \frac{۱}{۴\pi^۲ f^۲ C}$$

$$= \frac{۱}{۴\pi^۲(۸/۱۵\times۱۰^۳)^۲(۱۵۸\times۱۰^{-۶})} = ۲/۴۱\,\mu\text{H}$$

(ب) انرژی کل برابر با انرژی بیشینه در هر یک از دو عنصر القاگر یا خازن است. (شکل ۲۷-۴) کتاب را ببینید). بنابراین با استفاده از انرژی بیشینهٔ القاگر داریم

$$U_{\max} = \frac{۱}{۲}LI^۲ = \frac{۱}{۲}(۲/۴۱\times۱۰^{-۶})(۴/۲۱\times۱۰^{-۳})^۲$$

$$= ۲۱/۳۹\ \text{pJ}$$

(پ) همان‌طور که گفتیم انرژی بیشینهٔ خازن و القاگر با هم برابرند و بنابراین نتیجهٔ بالا می‌توانیم با $Q^۲/۲C$ برابر قرار دهیم و از آنجا Q را به دست آوریم:

$$Q = \sqrt{۲CU_{\max}} = \sqrt{۲(۱۵۸\times۱۰^{-۶})(۲۱/۳۹\times۱۰^{-۱۲})}$$
$$= ۸۲/۲۱\text{nC}$$

۷۴- یک مدار LC نوسانی دارای القاییدگی ۳/۰۰mH و ظرفیت ۱۰/۰μF است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) بسامد زاویه‌ای و (ب) دورهٔ تناوب نوسان. (پ) در زمان $t = ۰$ خازن تا ۲۰۰μF باردار می‌شود و جریان صفر است. بار روی خازن را به طور تقریب برحسب تابعی از زمان رسم کنید.

حل: (الف)

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۳\times۱۰^{-۳})(۱۰\times۱۰^{-۶})}}$$
$$= ۵۷۷۳/۵\ \text{rad/s}$$

(ب)

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi}{(۵۷۷۳/۵)} = ۱/۱\times۱۰^{-۳}\ \text{s}$$

(پ)

$$q = q_m\cos(\omega t + \theta_۰)$$

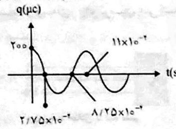
$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m\omega\sin(\omega t + \theta_۰)$$

جریان در $t = ۰$ صفر است، پس

$$\theta_۰ = ۰$$

$$q_m = ۲۰۰\mu\text{C}$$

$$q = ۲۰۰\cos ۵۷۷۳/۵t\ \ \mu\text{C}$$



۷۵- برای یک مدار RLC متوالی معین، بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر ۱۲۵V و بیشینهٔ جریان برابر ۳/۲۰A است. اگر جریان به مقدار ۰/۹۸۲rad از نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد جلو باشد، (الف) مقاومت ظاهری و (ب) مقاومت مدار چقدر است؟ (پ) آیا مدار بیشتر خازنی است یا القایی؟

حل: (الف) نیروها دافعه‌اند و شرط لازم خواهد بود

$$Z = \frac{V_m}{i_m} = \frac{(۱۲۵)}{(۳/۲۰)} = ۳۹/۱\ \Omega$$

(ب)

$$\varphi = ۰/۹۸۲\text{rad} = ۵۶/۳^\circ$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow \cos ۵۶/۳ = \frac{R}{۳۹/۱}$$

$$R = ۲۱/۷\Omega$$

(پ) چون جریان نسبت به ولتاژ جلوتر است (تقدم فاز دارد) مدار خازنی است.

۷۶- یک خازن ۱/۵۰μF دارای واکنایی خازنی ۱۲/۰Ω است. (الف) بسامد عملیاتی آن باید چقدر باشد؟ (ب) اگر بسامد دو برابر شود، واکنایی خازنی چقدر خواهد بود؟

حل: (الف)

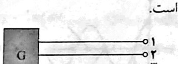
$$X_C = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{C۲\pi f_d} \Rightarrow f_d = \frac{۱}{C۲\pi X_C}$$

$$f_d = \frac{۱}{(۲\pi)(۱/۵\times ۱۰^{-۶})(۱۲)} = ۸۸۴۶\text{Hz}$$

(ب) اگر بسامد دو برابر شود، راکتانس نصف می‌گردد.

$$X_C = ۶\Omega$$

•۷۷- SSM در شکل ۲۷-۳۷ مولد سه فاز G توان الکتریکی‌ای ایجاد می‌کند که به وسیلهٔ سه سیم انتقال می‌یابد. پتانسیل‌های الکتریکی این سیم‌ها (نسبت به سطح مرجع مشترک) عبارت‌اند از $V_۱ = A\sin\omega_d t$ برای سیم ۱، $V_۲ = A\sin(\omega_d t - ۱۲۰^\circ)$ برای سیم۲ و $V_۳ = A\sin(\omega_d t - ۲۴۰^\circ)$ برای سیم ۳. برخی از انواع وسایل صنعتی (برای مثال، موتورها) دارای سه پایانه هستند و چنان طراحی می‌شوند که به طور مستقیم به این سه سیم متصل شوند. برای به کاربردن وسیلهٔ معمول‌تر دو پایانه‌ای (برای مثال ، لامپ)، آن را به هر دو تا از سه سیم وصل می‌کنند. نشان دهید که اختلاف پتانسیل بین هر *دو تا* از سه سیم (الف) به طور سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω_d نوسان می‌کند و (ب) دارای دامنهٔ $A\sqrt{۳}$ است.



خط انتقال با سه سیم

شکل ۲۷-۳۷ مسئلهٔ ۷۷

حل: (الف) سه ترکیب $\Delta V_{۱۲} = V_۱ - V_۲$ ، $\Delta V_{۱۳} = V_۱ - V_۳$ و $\Delta V_{۲۳} = V_۲ - V_۳$ را در نظر می‌گیریم. برای $\Delta V_{۱۲}$ داریم

$$\Delta V_{۱۲} = A\sin(\omega_d t) - A\sin(\omega_d t - ۱۲۰^\circ)$$

که برای محاسبهٔ آن از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin\alpha - \sin\beta = ۲\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

در نتیجه داریم:

$$\Delta V_{۱۲} = ۲A\sin\left(\frac{۱۲۰^\circ}{۲}\right)\cos\left(\frac{۲\omega_d t - ۱۲۰^\circ}{۲}\right) = \sqrt{۳}A\cos(\omega_d t - ۶۰^\circ)$$

به همان ترتیب داریم:

$$\Delta V_{۱۳} = A\sin(\omega_d t) - A\sin(\omega_d t - ۲۴۰^\circ) = ۲A\sin\left(\frac{۲۴۰^\circ}{۲}\right)\cos\left(\frac{۲\omega_d t - ۲۴۰^\circ}{۲}\right) = \sqrt{۳}A\cos(\omega_d t - ۱۲۰^\circ)$$

و

$$\Delta V_{۲۳} = A\sin(\omega_d t - ۱۲۰^\circ) - A\sin(\omega_d t - ۲۴۰^\circ) = ۲A\sin\left(\frac{۱۲۰^\circ}{۲}\right)\cos\left(\frac{۲\omega_d t - ۳۶۰^\circ}{۲}\right) = \sqrt{۳}A\cos(\omega_d t - ۱۸۰^\circ)$$

هر سه این عبارت‌ها،تابع‌هایی سینوسی از t با بسامد زاویه‌ای ω_d هستند.

(ب) همان طور که دیدیم دامنهٔ هر سه عبارت برابر $\sqrt{۳}A$ است.

۷۸- یک موتور الکتریکی به خروجی ac ، ۱۲۰ V و ۶۰/۰ Hz وصل شده است و با آهنگ ۰/۱۰۰hp (۱hp = ۷۶۴W) کار مکانیکی انجام می‌دهد. (الف) اگر موتور یک جریان rms ، برابر ۰/۶۵۰A بکشد، مقاومت مؤثر آن نسبت به توان انتقالی چقدر است؟ (ب) آیا این مقاومت با مقاومت پیچهٔ موتور در وقتی که موتور از خروجی جدا شده و به وسیلهٔ اهم‌سنج اندازه‌گیری شود، برابر است؟

حل: (الف) مقاومت مؤثر R_{eff} در $I^۲_{rms}R_{eff} = P_{mec}$ صدق می‌کند و بنابراین داریم

$$R_{eff} = \frac{P_{mec}}{I^۲_{rms}} = \frac{(۰/۱۰۰hp)(۷۴۶\,\text{W/hp})}{(۰/۶۵۰\text{A})^۲} = ۱۷۶/۶\Omega$$

(ب) نه؛ این همان مقاومت پیچهٔ موتور نیست، بلکه مقاومت مؤثری برای انتقال توان از شکل الکتریکی به مکانیکی است. در واقع $I^۲_{rms}R$ برابر با P_{mec} نیست، بلکه برابر با آهنگ اتلاف انرژی ناشی از اتلاف گرمایی است.

۷۹- **(الف)** در یک مدار LC نوسانی، وقتی انرژی میدان الکتریکی ۵۰٪ انرژی میدان مغناطیسی است مقدار بار روی خازن برحسب بار بیشینهٔ روی آن چقدر است؟ (ب) پس از زمانی که خازن کاملاً پرشد چه کسری از زمان تناوب باید بگذرد تا این شرط ایجاد شود؟

حل: (الف) در هر لحظه، انرژی کل U مدار برابر با مجموع انرژی U_E خازن و انرژی U_B القاگر است. وقتی $U_E = ۰/۵۰۰U_B$ و در نتیجه $U_B = ۲U_E$ است، $U = U_E + U_B = ۳/۰۰U_E$ می‌شود. انرژی U_E در هر لحظه برابر با $q^۲/۲C$ است، ولی انرژی کل مدار را می‌توان با $Q^۲/۲C$ نشان داد که در آن Q بیشینهٔ بار روی خازن است. بنابراین داریم:

$$\frac{Q^۲}{۲C} = ۳/۰۰\frac{q^۲}{۲C} \Rightarrow q = \frac{Q}{\sqrt{۳/۰۰}} = ۰/۵۷۷Q$$

(ب) اگر خازن در $t = ۰$ کاملاً باردار باشد، بار وابسته به زمان آن با $q = Q\cos\omega t$ داده می‌شود که در اینجا $q = ۰/۵۷۷Q$ است. از آنجا $\cos\omega t = ۰/۵۷۷$ و در نتیجه $\omega t = ۰/۹۵۵\,rad$ می‌شود. چون $\omega = ۲\pi/T$ است برای t خواهیم داشت:

$$t = \frac{۰/۹۵۵T}{۲\pi} = ۰/۱۵۲T \Rightarrow \frac{t}{T} = ۰/۱۵۲$$

۸۰- یک مدار RLC متوالی به وسیلهٔ یک منبع متناوب با بسامد ۴۰۰Hz و دامنهٔ emf، ۹۰/۰ V به کار می‌افتد. مقاومت ۲۰/۰Ω، ظرفیت ۱۲/۱ μF و القاییدگی ۲۴/۲mH

است. اختلاف پتانسیل rms دو سر (الف) مقاومت، (ب) خازن و (پ) القاگر چقدر است؟ (ت) آهنگ متوسطی که با آن انرژی تلف می‌شود چقدر است؟

حل: (الف) $V_{R,rms} = I_{rms}R$ و $I_{rms} = \varepsilon_{rms}/Z$ است. پس برای محاسبهٔ $V_{R,rms}$ به مقاومت ظاهری $Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲}$ نیاز داریم. برای X_L و X_C به ترتیب داریم:

$$X_L = ۲\pi f_d L = ۲\pi(۴۰۰)(۲۴/۲\times ۱۰^{-۳}) = ۶۰/۸۲\Omega$$

$$X_C = (۲\pi f_d C)^{-۱} = ۲\pi(۴۰۰)(۲۴/۲\times ۱۰^{-۳}) = ۶۰/۸۲\Omega$$

و از آنجا

$$Z = \sqrt{(۲۰/۰)^۲ + (۶۰/۸۲ - ۳۲/۸۸)^۲} = ۳۴/۳۶\Omega$$

بنابراین I_{rms} چنین می‌شود

$$I_{rms} = \frac{\varepsilon_m/\sqrt{۲}}{Z} = \frac{۹۰/۰\text{ V}}{\sqrt{۲}(۳۴/۳۶)} = ۱/۸۵\text{A}$$

و از آنجا $V_{R,rms}$ به دست می‌آید

$$V_{R,rms} = I_{rms}R = (۱/۸۵\text{A})(۲۰/۰) = ۳۷/۰۴\text{V}$$

(ب) با استفاده از $X_C = ۳۲/۸۸\Omega$ و $I_{rms} = ۱/۸۵\text{A}$ خواهیم داشت

$$V_{C,rms} = I_{rms}X_C = (۱/۸۵)(۳۲/۸۸) = ۶۰/۹\text{V}$$

(پ) با استفاده از $X_L = ۶۰/۸۲\,\Omega$ و $I_{rms} = ۱/۸۵\text{A}$ خواهیم داشت

$$V_{L,rms} = I_{rms}X_L = (۱/۸۵)^۲(۶۰/۸۲) = ۱۱۲/۷\text{V}$$

(ت) آهنگ میانگین اتلاف انرژی برابر است با

$$P_{avg} = (I_{rms})^۲R = (۱/۸۵)^۲(۲۰/۰) = ۶۸/۶\text{W}$$

۸۱- در یک مدار RLC متوالی معین که در بسامد ۶۰/۰Hz کار می‌کند بیشینهٔ ولتاژ دو سر القاگر ۲/۰۰ برابر بیشینهٔ ولتاژ در دو سر مقاومت و ۲/۰۰ برابر بیشینهٔ ولتاژ دو سرخازن است. (الف) جریان از نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد چه زاویه‌ای عقب می‌افتد؟ (ب) اگر بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر ۳۰/۰ V باشد، مقاومت مدار باید چه مقدار باشد تا بیشینهٔ جریان ۳۰۰mA به دست آید؟

حل: (الف) ثابت فاز با استفاده از $\tan\phi = (X_L - X_C)/R$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه

$$V_L = ۲V_R \Rightarrow IX_L = ۲IR \Rightarrow X_L = ۲R$$

و

$$V_L = ۲X_C \Rightarrow IX_L = ۲IX_C \Rightarrow X_L = ۲X_C$$

و از آنجا $X_C = R$ می‌شود. در نتیجه

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{۲R - R}{R}\right) = \tan^{-۱}(۱/۰۰) = ۴۵/۰^\circ$$

(ب) $I = I = \varepsilon_m/Z$ است که در آن

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲} = \sqrt{R^۲ + (۲R - R)^۲} = \sqrt{۲}R$$

در نتیجه داریم

$$R = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{۲}I} = \frac{۳۰/۰}{\sqrt{۲}(۳۰۰\times ۱۰^{-۳})} = ۷۰/۷۱\,\Omega$$

۸۲- یک القاگر ۱/۵۰mH در یک مدار LC نوسانی انرژی بیشینهٔ ۱۰/۰ μJ را ذخیره می‌کند. جریان بیشینه چقدر است؟

حل: با استفاده از $U_{max} = \frac{۱}{۲}LI^۲$ داریم

$$I = \sqrt{\frac{۲U_{max}}{L}} = \sqrt{\frac{۲(۱۰/۰\times ۱۰^{-۶})}{۱/۵۰\times ۱۰^{-۳}}} = ۰/۱۱۵\text{A}$$

۸۳- مولدی با بسامد نوسانی قابل تنظیم به طور متوالی به یک القاگر L=۲/۵۰μF و یک خازن C=۳/۰۰μF بسته شده است. در چه بسامدی مولد بزرگترین دامنهٔ جریان ممکن را در مدار ایجاد می‌کند؟

حل: بیشترین دامنهٔ جریان به ازای برابری واکنایی القایی و خازنی (حالت تشدید) به دست می‌آید. بنابراین

$$\omega_d = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۲/۵۰^{-۳})(۳/۰۰\times ۱۰^{-۶})}} = ۱/۱۵\times ۱۰^۴\text{ rad/s}$$

و از آنجا

$$f_d = \frac{\omega_d}{۲\pi} = \frac{۱/۱۵\times ۱۰^۴}{۲\pi} = ۱/۸۴\text{kHz}$$

۸۴- یک مدار RLC متوالی دارای بسامد تشدید ۶/۰۰kHz است. وقتی مدار در ۸/۰۰kHz به کار افتد، دارای مقاومت ظاهری ۱/۰۰kΩ و ثابت فاز ۴۵° است. (الف) R ، (ب) L و (پ) C برای این مدار چقدرند؟

حل: (الف) از معادله مربوطه به فاز ثابت می‌توان نوشت

$$R = Z\cos\phi = (۱/۰۰\times ۰^۳)(\cos ۴۵^\circ) = ۷۰۷/۱\,\Omega$$

(ب) چون $f = ۸۰۰۰\text{Hz}$ است، $\omega_d = ۲\pi(۸۰۰۰)\text{rad/s}$ می‌شود. از $\tan\phi = (X_L - X_C)/R$ نتیجه می‌گیریم که چون $\phi = ۴۵^\circ$ است، واکنایی خالص برابر با مقاومت می‌شود:

$$X_L - X_C = \omega_d L - \frac{۱}{\omega_d C} = ۷۰۷/۱\Omega$$

از طرفی بسامد تشدید را نیز می‌دانیم که برابر ۶۰۰۰Hz است. چون $\omega = ۱/\sqrt{LC}$ است، از آنجا $C = ۱/(۲\pi\times ۶۰۰۰)^۲L$ می‌شود. با قرار دادن این C در رابطهٔ واکنایی خالص، L پس از کمی عملیات جبری ساده برابر $L = ۳۲/۱۷\text{mH}$ می‌شود.

(پ) حال با قرار دادن L در رابطهٔ C به سادگی به $C = ۲۱/۸۹\text{nF}$ می‌رسیم.

۸۵- یک مدار LC در بسامد ۱۰/۴kHz نوسان می‌کند. (الف) اگر ظرفیت ۳۴۰ μF باشد، القاییدگی چقدر است؟ (ب) اگر

بیشینهٔ جریان برابر $7/20\,mA$ باشد، انرژی کل در مدار چقدر است؟ (پ) بار بیشینهٔ روی خازن چقدر است؟

حل: (الف) $\omega = 2\pi f = 1/\sqrt{LC}$ را برای L حل می‌کنیم

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 (10/4\times10^3)^2 (340\times10^{-6})}$$

$$= 6/89\times10^{-7}\ H$$

(ب) انرژی کل را می‌توان هنگامی که جریان بیشینه است با استفاده از القاگر به دست آورد

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(6/89\times10^{-7})(7/20\times10^{-3})^2$$

$$= 1/79\times10^{-11}\ J$$

(پ) Q را با استفاده از $U = Q^2/2C$ به دست می‌آوریم

$$Q = \sqrt{2CU} = \sqrt{2(340\times10^{-6})(1/79\times10^{-11})}$$

$$= 1/10\times10^{-7}\ C$$

۸۶- یک موتور الکتریکی معین وقتی تحت بار است و در ولتاژ rms برابر $220\,V$ کار می‌کند جریان rms ، $3/00\,A$ را می‌کشد. موتور دارای مقاومت $24/0\,\Omega$ است و واکنایی خازنی ندارد. واکنایی القایی موتور چقدر است؟

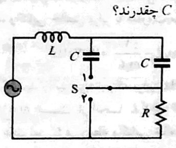
حل: $X_C = 0$ است لذا داریم

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

و از آنجا

$$X_L = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_m}{I}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{220V}{3/00A}\right)^2 - (24/0\Omega)^2} = 69/29\Omega$$

۸۷- مولد ac در شکل ۲۷-۳۸ ، $120\,V$ را در $60/0\,Hz$ تولید می‌کند. وقتی در شکل کلید S باز است، جریان به اندازهٔ $20/0°$ از emf مولد جلو می‌افتد. وقتی کلید در وضعیت ۱ است، جریان به اندازهٔ $10/0°$ از emf مولد عقب می‌افتد. وقتی کلید در وضعیت ۲ قرارگیرد دامنهٔ جریان $2/00\,A$ است. (الف) R ، (ب) L و (پ) C چقدرند؟



شکل ۲۷-۳۸ مسئلهٔ ۸۷

حل: در حالت اول، مدار RLC می‌باشد.

$$\varphi = -20 \Rightarrow \tan(-20) = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$X_L - X_C = -0/364R \qquad (1)$$

اگر کلید روی موقعیت (۱) باشد.

$$\varphi = 10 \Rightarrow C' = 2C \Rightarrow X_C' = \frac{X_C}{2}$$

$$\tan 10 = \frac{X_L - X_C'}{R} = \frac{X_L \frac{X_C}{2}}{R} \Rightarrow$$

$$X_L - \frac{X_C}{2} = 0/176R \qquad (2)$$

اگر کلید روی موقعیت (۲) قرار داشته باشد، مقاومت R حذف می‌گردد.

$$X_C - X_L = \frac{120}{2} = 60\Omega \qquad (3)$$

(الف) از معادله (۱) و (۳)

$$-60 = -0/364R \Rightarrow R \Rightarrow R = 165\Omega$$

(ب)

$$X_C = 60\,X_L$$

$$(2) \Rightarrow X_L - \frac{60 + X_L}{2} = (0/176)(165) = 29$$

$$X_L = 118\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{(118)}{(2\pi)(60)} = 0/313\ H$$

(پ)

$$X_C = 60 + 118 = 178\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{X_C}$$

$$C = \frac{1}{(2\pi)(60)(178)} = 1/49\times10^{5}\ F$$

۸۸- در یک مدار LC نوسانی، $L = 8/00\,mH$ و $C = 1/40\,\mu F$ است. در زمان $t = 0$ ، جریان بیشینه و برابر $12/0\,mA$ است. (الف) در حین نوسان‌ها بار بیشینه روی خازن چقدر است؟ (ب) در $t > 0$ کمترین زمانی که در آن آهنگ تغییر بار روی خازن بیشینه می‌شود چقدر است؟ (پ) این آهنگ بیشینه چقدر است؟

حل:
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(8\times10^{-3})(1/40\times10^{-6})}} = 9449\ rad/s$$

(الف)
$$U_m = \frac{1}{2}Li_m^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(8\times10^{-3})(12\times10^{-3})^2$$

$$= 5/76\times10^{-7}\ J$$

$$U_m = \frac{q_m^2}{2C} \Rightarrow q_m = \sqrt{2CU_m}$$

$$q_m = \sqrt{(2)(1/40\times10^{-6})(5/76\times10^{-7})} = 1/27\times10^{-6}\ C$$

یا $1/27\,\mu C$

(ب)

$$q = q_m \cos\omega t$$

$$U_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2\omega t$$

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{q_m^2}{C}\omega\sin\omega t\cos\omega t = -\frac{q_m^2\omega}{2C}\sin 2\omega t$$

این عبارت موقعی بیشینه است که $\sin 2\omega t = 1$ باشد.

$$2\omega_d t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (2)(9449)t = \frac{(3/14)}{2}$$

$$t = 8/31\times10^{-5}\ s$$

(پ)

$$\left|\frac{U_C}{dt}\right| = \frac{(1/27\times10^{-6})^2(9449)}{(2)(1/40\times10^{-6})} = 5/44\times10^{-3}\ W$$

۸۹- برای یک مدار RLC متوالی با محرک سینوسی نشان دهید که در یک چرخهٔ کامل با دورهٔ تناوب T ، (الف) انرژی ذخیره شده در خازن تغییر نمی‌کند؛ (ب) انرژی ذخیره شده در القاگر تغییر نمی‌کند؛ (پ) نیروی محرکهٔ الکتریکی انرژی $(\frac{1}{2}T)\mathscr{E}_m I\cos\phi$ را تولید می‌کند؛ (ت) مقاومت مقدار انرژی $(\frac{1}{2}T)RI^2$ را تلف می‌کند. (ث) نشان دهید کمیت‌هایی که در (پ) و (ت) به دست آورده‌اید مساوی‌اند.

حل: (الف)
$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega t,\ i = I_m\sin(\omega t - \varphi)$$

$$V_C = X_C i = X_C I_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2 \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow U_C(0) = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2 \sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = T \Rightarrow U_C(T) = \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2\left(\frac{2\pi}{T}T - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}CX_C^2 I_m^2 \sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_C(T) = U_C(0)$$

پس انرژی خازن نیز دارای دورهٔ T می‌باشد.

(ب)

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$U_L(0) = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2(-\varphi)$$

$$U_L(T) = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2(2\pi - \varphi) = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2(-\varphi)$$

$$U_C(T) = W_L(0)$$

(پ) انرژی ایجاد شده در مولد در مدت زمان dt برابر است با:

$$dU_E = \varepsilon dt = \varepsilon_m \sin\omega t\, I_m \sin(\omega t - \varphi)dt$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A = B)]$$

$$dU_E = \frac{1}{2}I_m\varepsilon_m[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]dt$$

$$dU_E = \frac{1}{2}I_m\varepsilon_m\int_0^T[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]dt$$

$$= \frac{1}{2}I_m\varepsilon_m\left\{T\cos\varphi - \frac{1}{2\omega}[\sin(2\omega t - \varphi)|_0^T\right\}$$

$$= \frac{1}{2}TI_m\varepsilon_m\cos\varphi$$

(ت) انرژی مصرف شده در مقاومت در زمان dt برابر است با:

$$dU = Ri^2dt = RI_m^2\sin^2(\omega t - \varphi)dt$$

$$U_R = RI_m^2\int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi)dt =$$

$$RI_m^2\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\left[1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T} - \varphi\right)\right]dt\right\} = \frac{1}{2}TRI_m^2$$

(ث)
$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

از قسمت (پ) داریم:

$$U_E = \frac{T}{2}I_m\varepsilon_m\cos\varphi = \frac{T}{2}I_m ZI_m\frac{R}{Z} = \frac{1}{2}TI_m^2R$$

که همان نتیجهٔ قسمت (ت) است.

۹۰- چه ظرفیتی باید به دوسر یک القاگر $1/30\,mH$ بسته شود تا نوسانگر حاصل در $3/50\,kHz$ به حالت تشدید درآید؟

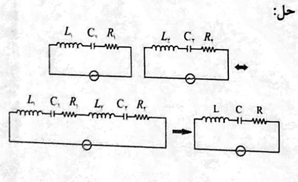
حل: با استفاده از $\omega = 2\pi f = 1/\sqrt{LC}$ داریم

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = \frac{1}{4\pi^2(3/50\times10^3)^2(1/30\times10^{-3})}$$

$$= 1/59\,\mu F$$

۹۱- یک مدار متوالی شامل مقاومت ، القاگر و خازن با ترکیب R_1 ، L_1 و C_1 دارای بسامد تشدید یکسان با مدار دیگری با ترکیب متفاوت R_2 ، L_2 و C_2 است. حال این دو ترکیب را به طور متوالی به هم می‌بندیم. نشان دهید که مدار جدید دارای بسامد تشدیدی یکسان با وقتی است که مدارها جدا بودند.

حل:



$$\omega_{\circ}=\frac{۱}{\sqrt{L_۱C_۱}}=\frac{۱}{\sqrt{L_۲C_۲}}\Rightarrow L_۱C_۱=L_۲C_۲$$

$$L=L_۱+L_۲$$

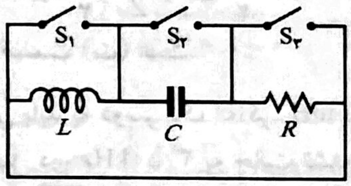
$$C=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}$$

$$\omega=\frac{۱}{\sqrt{LC}}=\frac{۱}{\sqrt{(L_۱+L_۲)\left(\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{C_۱+C_۲}{L_۱C_۱C_۲+C_۱L_۲C_۲}}=\sqrt{\frac{C_۱+C_۲}{L_۲C_۲C_۲+C_۱L_۲C_۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{C_۱+C_۲}{L_۲C_۲(C_۱+C_۲)}}=\frac{۱}{\sqrt{L_۲C_۲}}=\omega_{\circ}$$

۹۲- مدار نشان داده در شکل ۲۷-۳۹ را درنظر بگیرید. وقتی کلید $S_۱$ بسته باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار دارای ثابت زمانی τ_C است. وقتی کلید $S_۲$ بسته باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار دارای ثابت زمانی τ_L است. وقتی کلید $S_۳$ بسته باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار دارای ثابت زمانی τ_L است. وقتی کلید $S_۳$ بسته باشد و دو کلید دیگر باز باشند، مدار با دورهٔ تناوب T نوسان می‌کند. نشان دهید که $T=۲\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}$ است.



شکل ۲۷-۳۹ مسئلهٔ ۹۲

حل: در حالت اول مدار RC است.

$$\tau_C=RC\Rightarrow C=\frac{\tau_C}{R}$$

در حالت دوم مدار RL است.

$$\tau_L=\frac{L}{R}\Rightarrow L=R\tau_L$$

$$T=۲\pi\sqrt{Lc}=۲\pi\sqrt{(R\tau_L)\left(\frac{\tau_C}{R}\right)}=۲\pi\sqrt{\tau_L\tau_C}$$